



Los Caminos del Saber

Matemáticas 7



Matemáticas 7

para educación básica secundaria, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el Departamento Editorial de Santillana S. A., bajo la dirección de **Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento**.



EQUIPO EDITORIAL

Diana Constanza Salgado Ramírez, Editora ejecutiva

Carlos David Sánchez, Editor junior

Edgar Alexander Olarte Chaparro, Editor junior

Daniel Rojas Ruiz, Editor de contenidos digitales

Juan Gabriel Aldana Álvarez, Asistente editorial

Óscar Fernando Cruz, Isabel Hernández Ayala, Revisores de contenidos



AUTORES

Ludwig Gustavo Ortiz Wilches

Licenciado en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.
Especialista en docencia e investigación, Universidad Sergio Arboleda.

Marysol Ramírez Rincón

Licenciada en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.
Especialista en Matemática Aplicada, Universidad Sergio Arboleda.

Anneris del Rocío Joya Vega

Especialista en Matemáticas Aplicada, Universidad Sergio Arboleda.
Magíster en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional.

Valeria Cell Rojas

Licenciada en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.
Magíster en matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.

Martha Lucía Acosta

Licenciada en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional.
Especialista en computación para la docencia, Universidad Antonio Nariño.
Magíster en docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional.

Andrea Constanza Perdomo Pedraza

Magíster en edición, Universidad de Salamanca, España.
Licenciada en Matemáticas, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dorys Jeannette Morales Jaime

Doctora en Ingeniería Informática, Universidad Pontificia de Salamanca.
Especialista en Enseñanza de la Matemática, Universidad de Cundinamarca.

Jelinson Giovanni Gamboa Sulvara

Licenciado en Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

La especialista encargada de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue Lucía Victoria Cabrera Díaz, Licenciada en Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana, Magíster en Economía, Universidad de Los Andes.

La especialista encargada de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue María Ivonne Wilches Mahecha, Psicóloga, Universidad Nacional de Colombia, Magíster en estudios de género, Universidad Nacional de Colombia.

Se han hecho todos los esfuerzos para ubicar a los propietarios de los derechos de autor. Sin embargo, si es necesario hacer alguna rectificación, la Editorial está dispuesta a hacer los arreglos necesarios.



EQUIPO GRÁFICO Y TÉCNICO

Iván Merchán Rodríguez, Coordinador de arte creativo y diseñador del modelo gráfico

Pep Carrió, Creador gráfico de las cartillas

Mauricio García Duque, Coordinador de contenidos digitales

Martha Jeanet Pulido Delgado, Orlando Bermúdez Rodríguez, Correctores de estilo

Alvelo Javier Bueno Aguirre, Analista de soporte técnico

Luis Nelson Colmenares Barragán, Documentalista y operador de escáner

Claudia Marcela Jaime Tapia, Lady Midlennis Sánchez Yopazá, Asistentes de documentación

Sandra Patricia Acosta Tovar, Juan Carlos López Gómez, Diseñadores

Teresa Alcira Vanegas Chaves, Digitadora

Diomedes Gullombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Danilo Ramírez Parra, Juan Wiesner, Ilustradores

Carlos Valle, Fotógrafo

Federación Colombiana de patinaje, Colegio Salesiano, Repositorio Santillana, Archivo Santillana, Getty Images,

Corel professional Photos, Images provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana, Fotografía

Francisco Rey González, Jefe de producción



Debido a la naturaleza dinámica de la Internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web, a los que se hace referencia en este libro, pueden sufrir modificaciones o desaparecer. El uso de Internet debe ser supervisado por los padres de familia, tutores y docentes.

© 2013 EDITORIAL SANTILLANA S. A.

Carrera 11A No. 98-50

Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-24-2267-7 Obra completa

ISBN 978-958-24-2327-8 Edición para el alumno

ISBN 978-958-24-2328-5 Edición para el docente

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.

Depósito legal en trámite.

Impreso en Colombia por

Prohibida la reproducción total o parcial, el registro o la transmisión por cualquier medio de recuperación de información, sin permiso previo por escrito de la Editorial.



PRESENTACIÓN DEL MODELO

Proyecto Los Caminos del Saber

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?



- ▶ **Un libro del estudiante** que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de tus competencias.

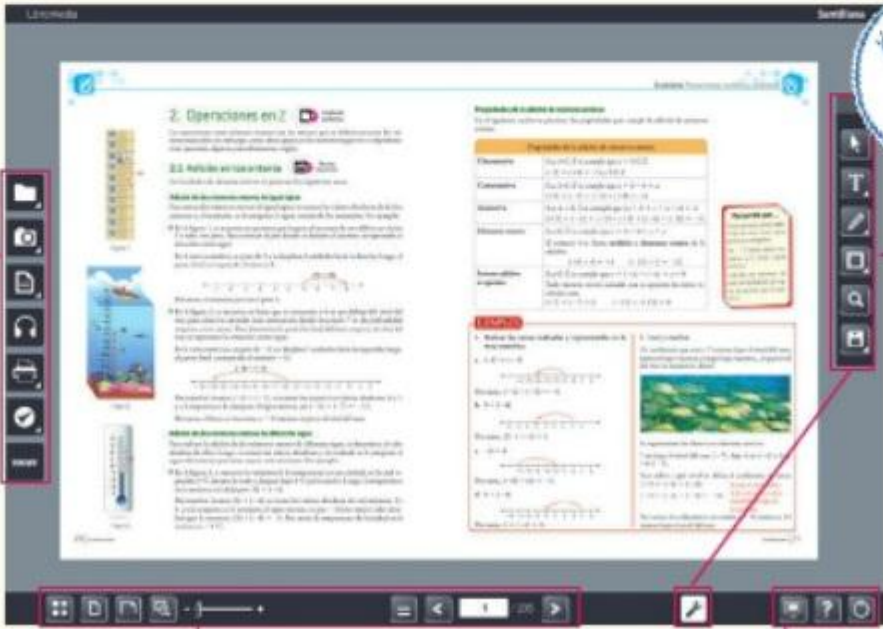
Un sitio Web

www.santillanaplus.com.co con más recursos **interactivos** y **multimedia** que agregan valor a tu desarrollo escolar.



▶ Un Libromedia en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.



Barra de contenidos

Barra de herramientas

Barra de navegación

Botón de ayuda

Libromedia

2. Operaciones en Z

2.1. Adición de enteros

Adición de números enteros positivos

Considera que tienes un depósito de dinero que se representa por el número 10. Si depositas más dinero, el saldo aumenta. Si retiras dinero, el saldo disminuye. El ejemplo 1 y el ejemplo 2 muestran cómo se representan estas situaciones.

Ejemplo 1: Si tienes 10 unidades de dinero y depositas 5 unidades más, el saldo aumenta a 15 unidades. Se representa como $10 + 5 = 15$.

Ejemplo 2: Si tienes 10 unidades de dinero y retiras 5 unidades, el saldo disminuye a 5 unidades. Se representa como $10 - 5 = 5$.

Adición de números enteros positivos y negativos

Considera que tienes un depósito de dinero que se representa por el número 10. Si depositas más dinero, el saldo aumenta. Si retiras dinero, el saldo disminuye. El ejemplo 3 y el ejemplo 4 muestran cómo se representan estas situaciones.

Ejemplo 3: Si tienes 10 unidades de dinero y depositas 5 unidades más, el saldo aumenta a 15 unidades. Se representa como $10 + 5 = 15$.

Ejemplo 4: Si tienes 10 unidades de dinero y retiras 5 unidades, el saldo disminuye a 5 unidades. Se representa como $10 - 5 = 5$.

Adición de números enteros positivos y negativos

Considera que tienes un depósito de dinero que se representa por el número 10. Si depositas más dinero, el saldo aumenta. Si retiras dinero, el saldo disminuye. El ejemplo 5 y el ejemplo 6 muestran cómo se representan estas situaciones.

Ejemplo 5: Si tienes 10 unidades de dinero y depositas 5 unidades más, el saldo aumenta a 15 unidades. Se representa como $10 + 5 = 15$.

Ejemplo 6: Si tienes 10 unidades de dinero y retiras 5 unidades, el saldo disminuye a 5 unidades. Se representa como $10 - 5 = 5$.

¿Cómo está organizado tu libro?

Para que juntos alcancemos las metas educativas que nos hemos propuesto, el programa de educación te ofrece un libro organizado en siete unidades y estas se presentan así:

Página inicial

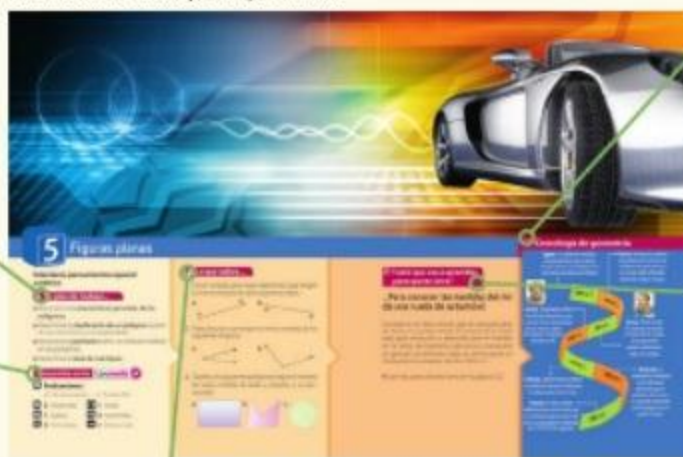
Al comienzo de cada unidad, encontrarás una doble página de apertura donde se presentan los temas que abordarás y los logros que vas a alcanzar. También se enumeran los contenidos y las actividades que desarrollarás en tu Libromedia, así como las evaluaciones que te ayudarán a afianzar tus conocimientos y competencias.

Tu plan de trabajo...

Presenta los temas y logros que vas a desarrollar en la unidad.

Encuentra en libromedia

Relaciona los objetos digitales y las evaluaciones que complementan tu libro.



Cronología

Es una línea de tiempo que te muestra cómo ha sido estudiado un tema de la unidad, en diferentes épocas y lugares del mundo.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

Es una lectura de motivación que te informa sobre una aplicación práctica del tema de la unidad.

Lo que sabes

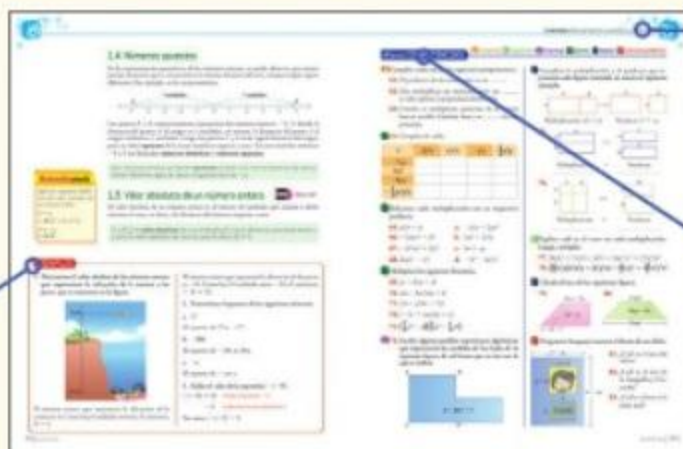
Es una autoevaluación de conceptos que debes saber para que aprendas con mayor facilidad lo que se va a trabajar.

Desarrollo de temáticas

El desarrollo de los contenidos está acompañado de ejercicios y de situaciones en contexto, cuya solución se explica paso a paso. Además, encuentras actividades para desarrollar tus competencias.

Ejemplos

Son ejercicios de aplicación de la teoría que se está trabajando.



Te indica el tipo de estándar o estándares que se trabajan en cada página.

Afianzo competencias

Son actividades para interpretar, argumentar y proponer. También para ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.

En el desarrollo de las temáticas también encuentras:



En estos recuadros encontrarás datos acerca de los acontecimientos históricos relacionados con la temática que se está trabajando.



Este cuadro te recuerda información clave para que puedas comprender mejor la teoría.



En esta sección encontrarás preguntas acerca de la teoría que se está trabajando.



A continuación aprenderás a resolver operaciones con números enteros, consulta cómo se suman y cómo se multiplican los números enteros.

En estos cuadros encuentras una pregunta acerca del tema siguiente para que te prepares para la próxima clase.

Al final de la unidad encuentras:

Ejercicios para repasar

Es una selección de actividades de cada tema, para que repases y respondas allí mismo.



Problemas para repasar

Te presenta un problema resuelto acerca de una de las temáticas de la unidad y algunos problemas para que apliques lo aprendido.



Secciones especiales

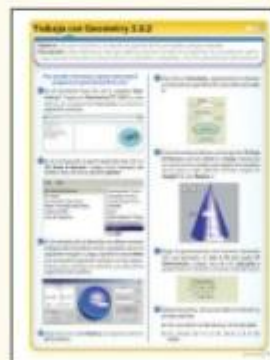
Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

En ella podrás leer y analizar situaciones que tienen aplicación con la temática estudiada.



Trabaja con

En ella encuentras actividades para que trabajes los temas de la unidad en diferentes programas informáticos.



Hiperpágina

Doble página en la que se abordan los temas de una manera más visual con el propósito de facilitar su comprensión.



CONTENIDOS

Pensamientos numérico y variacional

Unidad 1. Números enteros

8

* El conjunto de los números enteros	10	Sustracción en los enteros	23	Ecuaciones de la forma $x \pm b = c$	41
Definición de los números enteros	10	Multiplicación de números enteros	26	Ecuaciones de la forma $a \cdot x = c$	41
Representación en la recta numérica de los números enteros	11	División de números enteros	30	Ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$	41
Representación de puntos en el plano cartesiano	13	Potenciación de números enteros	32	* Ejercicios para repasar	44
Números opuestos	16	Radicación de números enteros	35	* Problemas para repasar	46
* Orden en $\mathbb{Z}$	18	* Polinomios aritméticos con números enteros	38	* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	48
Operaciones en $\mathbb{Z}$	20	* Ecuaciones con números enteros	40	* Trabaja con Microsoft Mathematics	50
Adición en los enteros	20	Propiedad uniforme	40		

Unidad 2. Números racionales

52

* El conjunto $\mathbb{Q}$	54	Adición de racionales en forma de fracción	73	Potenciación de números racionales	85
Definición del conjunto $\mathbb{Q}$	54	Sustracción de racionales en forma de fracción	74	Radicación de números racionales	88
Fraciones equivalentes	55	Adición de racionales en forma de número decimal	75	* Polinomios aritméticos con números racionales	91
Clasificación de racionales	57	Sustracción de racionales en forma de número decimal	75	* Ecuaciones con números racionales	97
Números mixtos	57	Propiedades de la adición en los números racionales	76	Solución de ecuaciones con números racionales	97
Representación decimal de un número racional	59	Multiplicación de racionales en forma de fracción	79	Planteamiento y solución de problemas	100
Clasificación de los números racionales decimales	60	Multiplicación de racionales decimales	79	* Ejercicios para repasar	102
Conversión de número decimal a fracción	62	Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Q}$	79	* Problemas para repasar	104
Representación de los racionales en la recta numérica	64	División de racionales en forma de fracción	82	* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	106
Ubicación de puntos en el plano cartesiano: coordenadas con números racionales	67	División de racionales en forma de decimales	83	* Trabaja con Graph	107
Orden en los racionales	70				
* Operaciones entre números racionales	73				

Unidad 3. Proporcionalidad

108

* Razones y proporciones	110	* Aplicaciones de la proporcionalidad	129	* Problemas para repasar	150
Razones	110	Regla de tres simple directa	129	* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	152
Proporciones	113	Regla de tres simple inversa	131	* Trabaja con Excel	154
* Proporcionalidad directa	119	Regla de tres compuesta	133		
Magnitudes directamente correlacionadas	119	Repartos proporcionales	135		
* Proporcionalidad inversa	125	Porcentaje	139		
Magnitudes inversamente correlacionadas	125	Intereses	143		
		* Ejercicios para repasar	148		



Unidad 4. Introducción al álgebra			156
* Expresiones algebraicas	158	Adición y sustracción	162
Clasificación de expresiones algebraicas	159	Multiplicación	164
Términos semejantes	159	División	166
Valor numérico	160	* Ejercicios para repasar	168
* Operaciones entre expresiones algebraicas	162	* Problemas para repasar	170
		* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	172
		* Trabaja con Microsoft Mathematics	173

Unidad 5. Figuras planas			174
* Polígonos	176	Otras unidades de longitud	191
Triángulos	178	Perímetro	193
Cuadriláteros	182	* Área	195
Construcción de polígonos regulares	186	Unidades métricas de área	195
* Circunferencia y círculo	188	Unidades agrarias	198
* Longitud	190	Área de polígonos	200
Unidades métricas de longitud	190	* Ejercicios para repasar	208
		* Problemas para repasar	210
		* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	212
		* Trabaja con Geo-Gebra	214

Unidad 6. Cuerpos geométricos			216
* Volumen	218	* Cuerpos redondos	228
Unidades métricas de volumen	218	Cilindro	228
* Poliedros	220	Cono	230
Paralelepípedo	220	Esfera	232
Prisma	222	* Capacidad	234
Pirámide	224	<i>Cristales de carbono</i>	236
Poliedros regulares	226	* Ejercicios para repasar	238
		* Problemas para repasar	240
		* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	242
		* Trabaja con Geometry 2.8.2	243

Unidad 7. Estadística y probabilidad			246
* Conceptos iniciales	246	Probabilidad simple	265
* Caracterización de variables cuantitativas	248	Propiedades de la probabilidad	266
Caracterización en forma agrupada	248	Principio de multiplicación	267
Caracterización en forma no agrupada	260	* Caracterización de datos y probabilidad	273
* Teoría de la probabilidad	265	Probabilidad y frecuencia relativa	273
		Probabilidad y tablas marginales	274
		* Ejercicios para repasar	278
		* Problemas para repasar	280
		* Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?	282
		* Trabaja con Excel	284
Glosario	286	Bibliografía	288

1

Números enteros

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Identificar las **características del conjunto de los números enteros**.
- Establecer las **relaciones entre números enteros**.
- Efectuar las **operaciones básicas con números enteros**, aplicando las propiedades correspondientes.
- Resolver **polinomios con números enteros**.
- Resolver **situaciones problemáticas con números enteros**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

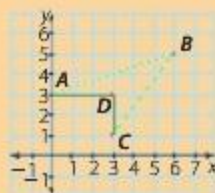
- ✓ Diagnóstica ✓ De desempeño

- | | |
|--|--|
|  5 Multimedia |  1 Audio |
|  1 Galería |  9 Imprimibles |
|  5 Actividades |  3 Enlaces web |

Lo que sabes...

1. Lee y responde. Diego compró 12 cuadernos que le costaron \$96.000. ¿Cuánto le costó cada uno?
2. Resuelve el polinomio $3 \times 6 + 36 \div 12 - 17$.
3. Escribe el número en cada espacio para obtener una igualdad.

a. $4 + \square = 11$	d. $6^{\square} = 36$
b. $\square \times 12 = 324$	e. $2^4 = \square$
c. $345 \div \square = 69$	f. $\square^3 = 729$
4. Encuentra las coordenadas de los vértices del polígono dado en el plano.



A = _____

B = _____

C = _____

D = _____



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para expresar la profundidad de las fosas marinas.

Las fosas marinas son fallas geológicas producidas en las profundidades del mar formando orificios de gran profundidad.

Son producidas en zonas de subducción, es decir, en donde se encuentran dos placas tectónicas, de las cuales, la placa de mayor densidad se mueve debajo de la otra y genera el movimiento de sedimentos marinos hacia el fondo de la fosa.

■ Lee más acerca de este tema en la página 48.

Cronología de números enteros

India. Los hindúes fueron los pioneros en utilizar cantidades negativas para representar deudas. Uno de ellos fue Brahmagupta.



China. Los chinos utilizaron los números negativos pero los diferenciaban de los positivos escribiéndolos de color rojo.

Alemania. El matemático Johan Widmann introdujo los símbolos $+$ y $-$ en las cantidades numéricas.



Alemania. Alemania. Michael Stifel publicó su libro *Arithmetica Integra* donde llama a los números negativos *números absurdos* y popularizó el uso de los signos $+$ y $-$.



Suiza. Leonardo Euler fue el primero en dar un estatus a los números enteros, demostrando que $(-1) \times (-1) = 1$.

Londres. El matemático Augustus De Morgan sugirió que los problemas con soluciones negativas se reescribieran.



Alemania. Karl Weierstrass realizó la construcción formal de los números enteros a partir de los números naturales.





Ampliación
multimedia



Historia de las matemáticas

Números negativos



Los números no positivos aparecieron por primera vez en la India, en el libro de Brahmagupta (matemático hindú), en el año 628 de nuestra era. En él, se distingue entre "bienes", "deudas" y la "nada". Es decir, los números positivos, los números negativos y el cero.

Los hindúes representaban los números negativos poniendo un punto encima de las cifras.



Recurso
imprimible

1. El conjunto de los números enteros

Existen varias situaciones en la vida cotidiana donde se necesita diferenciar una pérdida de una ganancia de dinero, temperaturas bajo cero, lugares bajo el nivel del mar, distinguir los desplazamientos de la derecha de los de la izquierda, entre otros. Las anteriores situaciones obligan a ampliar el conjunto de los números naturales, introduciendo así, un nuevo conjunto numérico que permita representar estas situaciones, denominado **números enteros**.

1.1 Definición de los números enteros

En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, no tiene sentido considerar restas tales como $9 - 13$, $6 - 29$, $33 - 49$ y, en general, todas aquellas en donde el minuendo es menor que el sustraendo. De este modo en el conjunto de los números enteros, que se simboliza con $\mathbb{Z}$, es posible resolver este tipo de operaciones.

El conjunto de los números enteros se forma con la introducción de los números enteros negativos, utilizados para representar situaciones tales como temperaturas inferiores a 0° o egresos de dinero. Estos números, forman el conjunto de los números negativos que se simboliza $\mathbb{Z}^-$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Por otra parte, el conjunto de los números naturales sin incluir el cero, es considerado como el conjunto de los enteros positivos, que se simboliza como $\mathbb{Z}^+$ y se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

El número 0 pertenece al conjunto de los números enteros y es el único que no se considera negativo o positivo.

El **conjunto de los números enteros** está formado por los enteros positivos, el número cero y los enteros negativos. Se determina por extensión así:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$\text{De otra forma, } \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

EJEMPLOS

Escribir el número entero que representa cada situación.

- a. La fosa oceánica más importante es la fosa Challenger, con 11.990 metros de profundidad.

En este caso, se utiliza un entero negativo, ya que se trata de una profundidad:

El número entero es: -11.990 m.



- b. El continente africano presenta el punto más elevado en el monte Kilimanjaro con una altura de 5.895 m y la mayor depresión se ubica a 155 m bajo el nivel del mar.

En este caso los números enteros que representan la situación son:

Monte Kilimanjaro: 5.895 m. Mayor depresión: -155 m.



1.2 Representación en la recta numérica de los números enteros



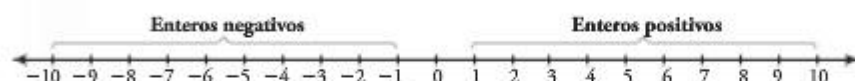
Actividad

Los números enteros se pueden representar gráficamente sobre una recta numérica, así:

Primero, se ubica un punto sobre la recta al que se le hace corresponder el cero.

Luego, a partir de este punto se dibujan marcas, separadas unas de otras por espacios iguales, tanto a la derecha como a la izquierda.

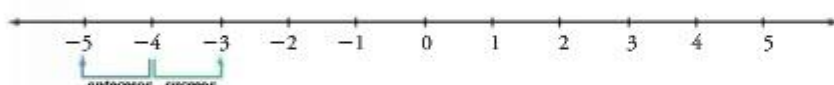
Por último, a cada marca se le asigna un número entero; a la derecha del cero se ubican los enteros positivos y a la izquierda, los enteros negativos, así:



En la recta numérica, los números enteros están organizados de forma creciente, de izquierda a derecha. Esto permite determinar el sucesor y el predecesor de un número entero.

El sucesor de un número entero es el número que se encuentra inmediatamente a la derecha del número dado. Mientras que el antecesor de un número entero es el número que está inmediatamente a la izquierda del número dado.

Por ejemplo, el sucesor de -4 es -3 , y el antecesor de -4 es -5 .



Recuerda que...

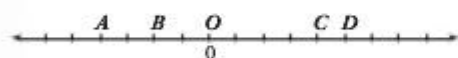
Los números enteros se pueden expresar de varias maneras, por ejemplo:

$$3 = +3 = (+3)$$

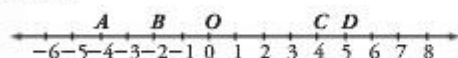
$$-4 = (-4)$$

EJEMPLOS

1. Determinar los números enteros representados en la recta numérica.



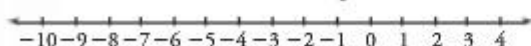
Primero, se ubican los números enteros en la recta numérica, así:



Por tanto, el número entero asociado a cada punto es:

$$A = -4 \quad B = -2 \quad C = 4 \quad D = 5 \quad O = 0$$

2. Observar la recta numérica. Luego, resolver.



- a. ¿Qué número entero se encuentra cinco unidades a la izquierda de -3 ?

El número entero que se encuentra cinco unidades a la izquierda de -3 es -8 .

- b. ¿Qué números enteros están entre -2 y 3 ?

Los números que están entre -2 y 3 son: $-1, 0, 1, 2$.

- c. Expresar por extensión el conjunto D formado por los números enteros que están a la derecha de -7 .

El conjunto D por extensión es:

$$D = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

3. Escribir la temperatura como un número entero. Luego, determinar el antecesor y sucesor del número entero.



El número entero que representa la temperatura de la ciudad de Moscú es -20 .

Luego, el sucesor de -20 es -19 y el antecesor es -21 .



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

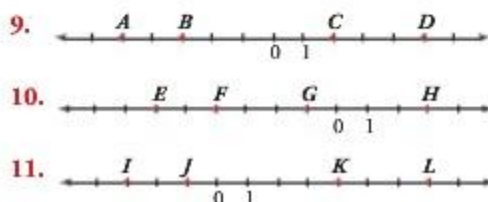
1. Responde.

- ¿Cuál es la utilidad de los números enteros?
- ¿Cómo se distinguen los números enteros positivos de los números enteros negativos?

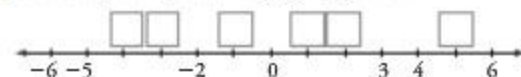
2. Escribe $\in$ o $\notin$, según corresponda.

- $-1 \square \mathbb{Z}^-$
- $+9 \square \mathbb{Z}^+$
- $-12 \square \mathbb{Z}^+$
- $17 \square \mathbb{Z}^-$
- $45 \square \mathbb{Z}^+$
- $-165 \square \mathbb{Z}^+$

3. Escribe el número entero asociado a cada punto representado en cada recta.



4. Observa y completa. Luego, responde.



- ¿Cuál es el antecesor de -1 ?
- ¿Cuál es el número entero cuyo sucesor es -2 ?

5. Representa cada situación con un número entero.

- El avión vuela a 2.700 m de altura.
- Un submarino se encuentra a 2.500 m bajo el nivel del mar.
- La rueda se inventó en el año 5500 a. C.
- Daniela tiene una deuda de \$2.300 en el almacén.
- Hay estacionamientos disponibles en el 2.º subterráneo del centro comercial.

6. Resuelve. Justifica tu respuesta en cada caso.

- ¿Cuántos números enteros están localizados entre -14 y 3 ? ¿Cuáles son estos números?
- Entre los números -7 , 8 , 3 , -10 , 6 , 4 y -2 , ¿cuál es el más alejado de cero? ¿Cuál está más cerca de cero?
- ¿Cuántos números enteros hay entre -1.000 y 1.000 ?

7. Expresa la respuesta de cada situación con un número entero.

- Al mediodía en una ciudad se registra una temperatura de 15°C bajo cero. Si al anochecer se produce un descenso de 11°C , ¿cuál es la temperatura al final del día?
- En el piso 23 de un edificio se encuentra una persona que ha descendido 12 pisos. ¿En qué piso se encontraba inicialmente la persona?

8. Lee, observa y resuelve.

Para generar energía eléctrica, a partir de yacimientos geotérmicos, se deben perforar profundos pozos que conduzcan, hacia la superficie terrestre, el fluido almacenado a altas temperaturas en la corteza de la Tierra. Ya en la superficie, el vapor que viene a alta presión se utiliza para hacer funcionar una turbina y así producir energía eléctrica.



- ¿Qué medidas de la ilustración anterior pueden ser representadas mediante números enteros?
- ¿Cuáles corresponden a números positivos?, ¿cuáles a números negativos?

9. Plantea una situación relacionada con cada temática, de tal forma que se represente con los números enteros.

- Zona abisal y seres vivos.
- Extracto bancario.
- Temperatura.
- Línea de tiempo.



1.3 Representación de puntos en el plano cartesiano



Actividad



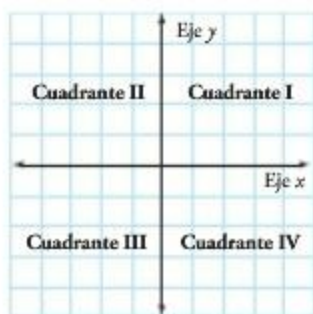
Enlace web

El **plano cartesiano** es un sistema que se utiliza para localizar puntos. Está formado por dos rectas numéricas perpendiculares llamadas **ejes**, cuyo punto de intersección recibe el nombre de **origen**.

En un plano cartesiano se reconocen los siguientes elementos:

La recta numérica horizontal denominada eje x y la recta numérica vertical denominada eje y , de tal forma que en el eje x se escriben los números enteros positivos hacia la derecha del origen y en el eje y hacia arriba del origen. Además, los números enteros negativos se escriben hacia la izquierda del origen en el eje x , y hacia abajo del origen en el eje y .

Las cuatro regiones generadas por los dos ejes que dividen el plano son denominadas cuadrantes y se representan con los números romanos I, II, III y IV.



En el plano cartesiano, cada punto se encuentra determinado por una pareja ordenada de números, la cual se escribe entre paréntesis y se separa con una coma. Por ejemplo, la pareja ordenada $(-2, 3)$ representa un punto ubicado en el segundo cuadrante.

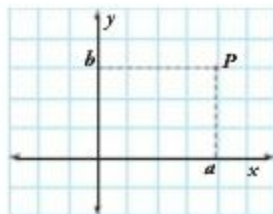
En toda pareja ordenada (a, b) se distinguen dos coordenadas: la coordenada a , denominada abscisa, localizada sobre el eje x y la coordenada b , denominada ordenada, ubicada sobre el eje y .

Para representar una pareja ordenada (a, b) en el plano cartesiano se realizan los siguientes pasos.

Primero, se localizan la abscisa sobre el eje x y la ordenada sobre el eje y .

Luego, se traza por a una recta vertical y por b una recta horizontal. La intersección de estas rectas representa el punto donde está ubicada la pareja (a, b) .

Por último, se nombra el punto con una letra mayúscula, así: $P(a, b)$, es decir, el punto P de coordenadas (a, b) , como se muestra en la figura.



Matemáticamente

¿Qué diferencia hay entre la representación gráfica en el plano cartesiano de los puntos $(-2, 1)$ y $(1, -2)$?



Historia de las matemáticas

René Descartes



René Descartes (1596-1650), matemático y filósofo francés, desarrolló el sistema de coordenadas cartesianas, cuyo nombre es en su honor.



Recurso imprimible

EJEMPLOS

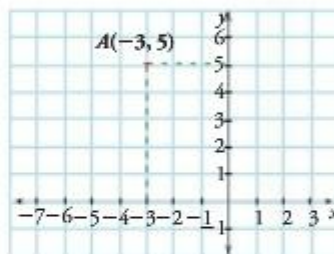
1. Representar en el plano cartesiano el punto $A(-3, 5)$. Luego, determinar en cuál cuadrante se encuentra ubicado el punto.

Primero, se ubica el número -3 en el eje horizontal.

Luego, se ubica el número 5 en el eje vertical. Después, se traza una recta vertical por -3 y una recta horizontal por 5 .

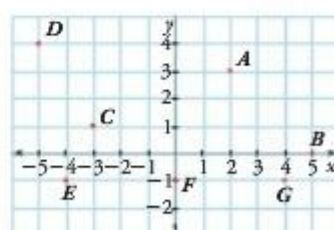
El punto se ubica en la intersección de las dos rectas.

Finalmente, el punto A se encuentra ubicado en el segundo cuadrante.

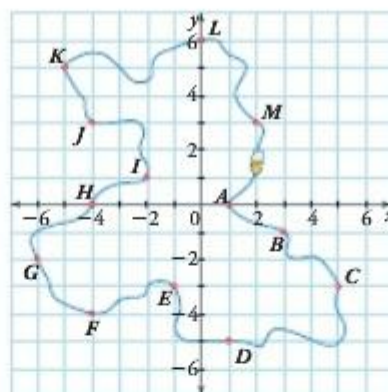


2. Observar el siguiente sistema de coordenadas. Luego, escribir las coordenadas de los puntos señalados.

Las coordenadas de los puntos señalados son: $A(2, 3)$, $B(5, 0)$, $C(-3, 1)$, $D(-5, 4)$, $E(-4, -1)$, $F(0, -1)$, $G(4, -1)$.



3. Encontrar en el dibujo los puntos marcados que cumplen con la condición dada.



- a. Puntos que tienen la misma ordenada.

Los puntos que tienen la misma ordenada son los que tienen la segunda componente igual, es decir, el mismo valor en y . En este caso los puntos son:

$$J(-4, 3) \text{ y } M(2, 3); H(-4, 0) \text{ y } A(1, 0); E(-1, -3) \text{ y } C(5, -3)$$

- b. Puntos que tienen abscisa cero.

Los puntos con abscisa cero, son los puntos ubicados sobre el eje y .

Por tanto, el punto que cumple la condición es $L(0, 6)$.

- c. Puntos que tienen la abscisa y ordenada negativa.

Los puntos con abscisa y ordenada negativas se ubican en el tercer cuadrante.

Por tanto, los puntos son: $G(-6, -2)$, $F(-4, -4)$ y $E(-1, -3)$.

Matemáticamente

¿Existe algún punto que se sitúe en los dos ejes simultáneamente? ¿Qué punto es?

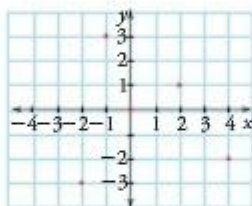


Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

- 30.** Escribe la letra que corresponde a cada punto ubicado en el plano cartesiano.

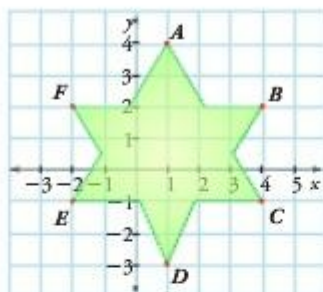
$A = (2, 1)$
 $B = (-1, 3)$
 $C = (0, 0)$
 $D = (4, -2)$
 $E = (-2, -3)$



- 31.** Completa la tabla indicando el cuadrante en el que se encuentra el punto dado o sugiriendo un punto para el cuadrante planteado.

Punto	Cuadrante	Punto	Cuadrante
$(-4, -3)$		$(-3, -2)$	
$(5, 2)$		$(3, 1)$	III
$(-3, 2)$		$(4, -2)$	II
	IV	$(-3, -5)$	
$(4, -5)$			
	I		

- 32.** Escribe las coordenadas de los vértices que se indican en la estrella.



- 33.** Ubica los siguientes puntos en un plano cartesiano. Luego, une los segmentos en orden con el color indicado, después escribe el nombre de la figura formada.

$A = (-6, 1)$ $E = (-1, 5)$ $I = (-3, -2)$
 $B = (-5, 6)$ $F = (3, 5)$ $J = (4, -2)$
 $C = (-4, 1)$ $G = (3, 1)$ $K = (4, -5)$
 $D = (-1, 1)$ $H = (-3, -5)$

Con rojo $B-C-A-B$	Con verde $D-E-F-G-D$	Con anaranjado $H-I-J-K-H$
Figura formada:	Figura formada:	Figura formada:

- 34.** Encuentra, si es posible, los puntos según la condición dada.

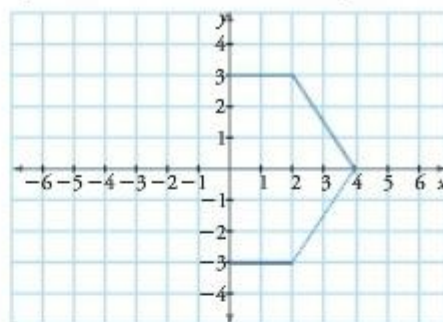
- 34.** Dos puntos que tengan la misma ordenada pero diferente abscisa.
35. Dos puntos que tengan la misma ordenada y la misma abscisa.
36. Dos puntos distintos que sean el tercer vértice de un triángulo isósceles, si las coordenadas de los otros vértices son: $M(2, 1)$ y $N(-2, 1)$.

- 37.** Determina las otras coordenadas del cuadrado cuyo vértice es $A(-2, 2)$ y cuyo lado mide 5 unidades. Justifica tu respuesta.

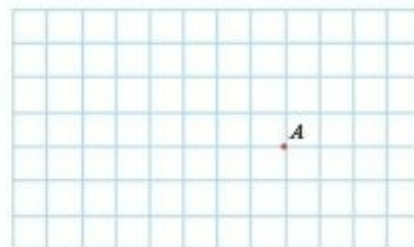
- 38.** Lee, observa y resuelve.

Una figura es simétrica si se pueden trazar en ella uno o varios ejes de simetría. Cada eje de simetría divide la figura en dos partes iguales pero contrapuestas.

- 39.** Completa el polígono de manera que el eje y del plano cartesiano sea uno de sus ejes de simetría.



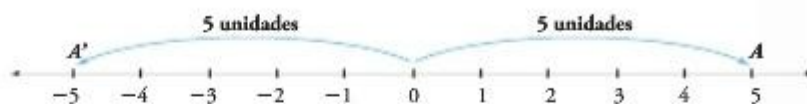
- 39.** Escribe las coordenadas de los vértices del polígono obtenido.
40. ¿Es posible trazar otros ejes de simetría en esta figura? Explica tu respuesta.
41. Dibuja los ejes de coordenadas para que el punto sea $A(-2, -1)$.





1.4 Números opuestos

En la representación geométrica de los números enteros, se puede observar que existen parejas de puntos que se encuentran a la misma distancia del cero, aunque tengan signos diferentes. Por ejemplo, en la recta numérica:



Los puntos A' y A , respectivamente, representan los números enteros -5 y 5 , donde la distancia del punto A' al origen es 5 unidades, así mismo, la distancia del punto A al origen también es 5 unidades. Luego, los puntos A' y A están a igual distancia del origen, pero en lados **opuestos** de la recta numérica respecto a cero. Por esta razón los números -5 y 5 son llamados **números simétricos** o **números opuestos**.

Dos números enteros se llaman **opuestos** si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo. Es decir, el opuesto de a es $-a$.

Matemáticamente

Explica la siguiente definición del valor absoluto de un número entero.

$|a| = a$,
si $a \in \mathbb{Z}^+$ o si $a = 0$.

$|a| = -a$,
si $a \in \mathbb{Z}^-$.

1.5 Valor absoluto de un número entero



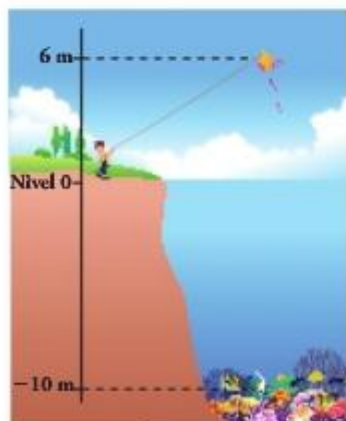
Enlace web

El valor absoluto de un número entero es el número de unidades que separan a dicho número de cero, es decir, a la distancia del número respecto a cero.

Si $a \in \mathbb{Z}$, el **valor absoluto** de a se simboliza $|a|$ y es la distancia que existe entre a y cero. El valor absoluto de cero es cero. Es decir, $|0| = 0$.

EJEMPLOS

- Determinar el valor absoluto de los números enteros que representan la ubicación de la cometa y los peces, que se muestran en la figura.



El número entero que representa la ubicación de la cometa es 6. Como hay 6 unidades entre 6 y 0, entonces, $|6| = 6$.

El número entero que representa la ubicación de los peces es -10 . Como hay 10 unidades entre -10 y 0, entonces, $|-10| = 10$.

- Determinar el opuesto de los siguientes números.

a. 17

El opuesto de 17 es -17 .

b. -384

El opuesto de -384 es 384.

c. $-x$

El opuesto de $-x$ es x .

- Hallar el valor de la expresión $| -(-9) |$.

$$| -(-9) | = | 9 | \quad \text{Se halla el opuesto de } -9.$$

$$= 9 \quad \text{Se determina el valor absoluto de 9.}$$

Por tanto, $| -(-9) | = 9$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde.

42. ¿Cómo se encuentra el número opuesto de un número entero en la recta numérica?
 43. ¿Cuál es el procedimiento para hallar el valor absoluto de un número entero?

I Representa gráficamente cada uno de los siguientes valores absolutos. Luego, halla el valor de cada número.

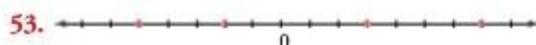
44. $|-5|$ 47. $|-8|$
 45. $|64|$ 48. $|y|$
 46. $|-100|$ 49. $|-x|$

E 50. Completa la tabla.

Número	Opuesto	Valor absoluto
7		
	23	
-120		
	-9.876	
		50

51. En la última fila, ¿hay una única respuesta?

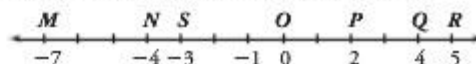
E Escribe el opuesto de los números representados en cada gráfico.



D Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

55. El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.
 56. El valor absoluto de un número es igual al opuesto del número.
 57. El valor absoluto del opuesto de algunos números es negativo.
 58. El opuesto del opuesto de un número equivale al número.
 59. El opuesto de un entero negativo equivale al valor absoluto del número.

E Observa la recta numérica. Luego, responde.



60. ¿Cuál es el valor absoluto de los números representados en la recta?
 61. ¿Cuáles de los números representados tienen igual valor absoluto?

D Determina. Explica tu respuesta.

62. El número simétrico a -23 .
 63. El número opuesto del valor absoluto de un número.
 64. El valor absoluto del simétrico de n .
 65. Dos números enteros cuyo valor absoluto sea igual a 700.

E Completa.

66. $|-5| = \square$ 69. $|-16| = \square$
 67. $|\square| = 54$ 70. $|-231| = \square$
 68. $|\square| = z$ 71. $-(-10) = \square$

R Reemplaza z por el número entero apropiado para que se verifique la igualdad.

72. $|z| = 17$ 76. $|z| = 0$
 73. $|z| = x$ 77. $8 = -z$
 74. $(-z) - |3| = 4$ 78. $-[(-z)] = -11$
 75. $(-3) + |-z| = 8$ 79. $(-6) + |-z| = 8$

S Observa la figura. Luego, responde.



80. ¿Qué máquina está a mayor distancia del nivel del mar, el avión o el submarino?
 81. ¿Cuál es el valor absoluto de -600 y de 600 ?
 82. En general si $a \in \mathbb{Z}$, ¿cómo son $|a|$ y $|-a|$? Explica tu respuesta.



Historia de las matemáticas



Los chinos utilizaron los números negativos, pero los diferenciaban de los positivos escribiéndolos de otra forma. Por ejemplo, escribían los números negativos de color rojo mientras que los positivos los escribían de color negro.

De ahí viene la expresión "estar en números rojos", es decir, tener deudas.

En sus ábacos, los chinos usaban cuentas de diferentes colores.

1.6 Orden en $\mathbb{Z}$



Recurso imprimible

Cuando se comparan dos números enteros a y b , entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

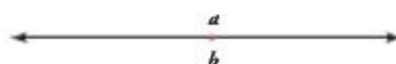
- $a < b$, a es menor que b , si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, a se encuentra ubicado a la izquierda de b .



- $a > b$, a es mayor que b , si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, a se encuentra ubicado a la derecha de b .



- $a = b$, a es igual a b , si al representarlos en la recta numérica, a y b les corresponde el mismo punto.

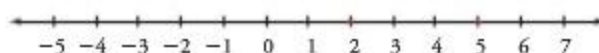


EJEMPLOS

- Determinar la relación de orden entre los siguientes números.

- 5 y 2

Primero, se ubican los números en la recta numérica.

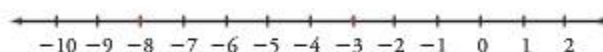


Luego, $5 > 2$ porque 5 se encuentra a la derecha de 2.

En general, un número entero positivo entre más a la derecha se encuentra del cero es mayor, en este caso el número 5 se encuentra más a la derecha del cero que el número 2.

- 8 y -3

Primero, se ubican los números en la recta numérica.



Luego, $-8 < -3$ porque -8 se encuentra a la izquierda de -3.

En general, un número entero negativo entre más a la izquierda se encuentra del cero es menor, en este caso el número -8 se encuentra más a la izquierda del cero que el número -3.

- Leer, observar y resolver. El termómetro registra 2°C , después 6°C , y por último, -4°C . Escribir estas temperaturas en orden creciente.



Al comparar los números enteros, se tiene: $-4 < 2$, $-4 < 6$ y $2 < 6$.

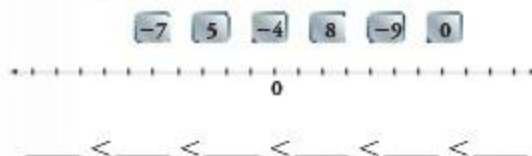
Por tanto, las temperaturas en orden creciente son -4, 2 y 6. Luego, al ordenar las temperaturas se tiene que $-4^{\circ}\text{C} < 2^{\circ}\text{C} < 6^{\circ}\text{C}$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** 83. Ubica los siguientes números en la recta numérica y luego escríbelos de menor a mayor.



- R** Escribe las palabras “mayor” o “menor” según corresponda. Justifica tu respuesta.

84. Entre dos números enteros positivos es menor el que tiene _____ valor absoluto.
85. Entre dos números enteros negativos es menor el que tiene _____ valor absoluto.
86. Entre dos números enteros, uno positivo y otro negativo, es _____ el número negativo y es _____ el número positivo.
87. El cero es _____ que cualquier número positivo y _____ que cualquier número negativo.

- E** Ordena, de menor a mayor, los siguientes números:

88. $-16, 4, -5, 0, 23, -1, 8, -3$
89. $12, -7, 20, -2, 14, -6, 1, -10$
90. $34, -3, -18, 9, -4, 5, -56, 60$
91. $-4, 0, -6, 7, -11, 21, -3, 12, -7, 9$
92. $-125, 78, -21, 80, -11, 125, 21, -65$

- E** Completa con los signos $>$, $<$ o $=$.

93. -4 -8 99. -1 3
94. -5 0 100. -2 -5
95. $|-5|$ 8 101. $|-9|$ $|+9|$
96. -16 $|-17|$ 102. $|-5|$ -5
97. $|-12|$ 12 103. $|-1|$ 0
98. $|-8|$ $|-5|$ 104. 19 $|-27|$

- R** Escribe los números enteros que cumplen la condición.

105. Mayores que -5 y menores que 4 .
106. Menores que -1 y mayores que -9 .
107. Menores que valor absoluto de 4 .

- S** Lee y responde.

En la siguiente tabla se presentan las temperaturas de fusión y ebullición de algunos elementos de la naturaleza.

Elemento	Punto de fusión °C	Punto de ebullición °C
Hidrógeno	-259	-253
Helio	-172	-269
Aluminio	660	2.467
Potasio	254	962
Mercurio	-39	357

108. ¿Cuál elemento de la tabla necesita menor temperatura para fundirse?
109. Ordena los elementos de la tabla de menor a mayor temperatura de fusión.
110. Felipe afirma que el helio tiene mayor punto de ebullición que el hidrógeno. ¿Es correcta su afirmación? ¿Por qué?

- S** Lee y resuelve.

Las investigaciones llevadas a cabo sobre los fósiles han permitido situar, con bastante precisión, la fecha de aparición de distintos tipos de seres vivos a lo largo de la historia del planeta Tierra. A continuación se presentan algunos datos que permiten establecer, de manera aproximada, la cronología de la aparición de los primeros seres vivos.

- 2.000 millones de años. Primeros fósiles (bacterias, algas y hongos).
 - 4.600 millones de años. Formación de la corteza terrestre.
 - 1.000 millones de años. Primeras eucariotas.
 - 700 millones de años. Primeros metozoarios (celentéreos, anélidos y artrópodos).
 - 3.100 millones de años. Primeras huellas de vida. Fósiles encontrados en África del Sur.
111. Ordena cronológicamente los acontecimientos anteriores. Luego, ubícalos en la línea de tiempo.

Lo que viene... ➡

A continuación aprenderás a resolver operaciones con números enteros, consulta cómo se suman y cómo se multiplican los números enteros.



2. Operaciones en $\mathbb{Z}$



Las operaciones entre números enteros son las mismas que se definieron entre los números naturales; sin embargo, como ahora aparecen los números negativos es importante tener presentes algunos procedimientos y reglas.

2.1 Adición en los enteros



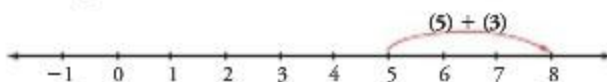
En la adición de números enteros se presentan los siguientes casos:

Adición de dos números enteros de igual signo

Para sumar dos números enteros de igual signo, se suman los valores absolutos de dichos números y, al resultado, se le antepone el signo común de los sumandos. Por ejemplo:

- En la figura 1, se muestra una persona que ingresa al ascensor de un edificio en el piso 5 y sube tres pisos. Para conocer el piso donde se detiene el ascensor, se representa la situación como sigue:

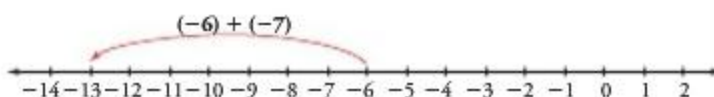
En la recta numérica, se parte de 5 y se desplaza 3 unidades hacia la derecha; luego, el punto final corresponde al número 8.



Por tanto, el ascensor paró en el piso 8.

- En la figura 2, se muestra un buzo que se encuentra a 6 m por debajo del nivel del mar, para observar animales más interesantes decide descender 7 m de profundidad respecto a este punto. Para determinar la posición final del buzo respecto al nivel del mar, se representa la situación como sigue.

En la recta numérica, se parte de -6 y se desplaza 7 unidades hacia la izquierda; luego, el punto final corresponde al número -13 .



Para resolver la suma $(-6) + (-7)$, se suman los respectivos valores absolutos, 6 y 7, y a la respuesta se le antepone el signo menos, así: $(-6) + (-7) = -13$.

Por tanto, el buzo se encuentra a -13 metros respecto al nivel del mar.

Adición de dos números enteros de diferente signo

Para realizar la adición de dos números enteros de diferente signo, se determina el valor absoluto de ellos. Luego, se restan los valores absolutos y al resultado se le antepone el signo del número que tiene mayor valor absoluto. Por ejemplo:

- En la figura 3, se muestra la variación de la temperatura en una ciudad, en la cual registraba 3°C durante la tarde y después bajó 4°C por la noche. Luego, la temperatura en la mañana está dada por: $(3) + (-4)$.

Para resolver la suma $(3) + (-4)$, se restan los valores absolutos de cada número, 3 y 4, y a la respuesta se le antepone el signo menos, ya que -4 tiene mayor valor absoluto que 3, entonces, $(3) + (-4) = -1$. Por tanto, la temperatura de la ciudad en la mañana es -1°C .

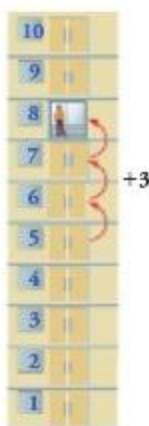


Figura 1.



Figura 2.



Figura 3.



Propiedades de la adición de números enteros

En el siguiente cuadro se plantean las propiedades que cumple la adición de números enteros.

Propiedades de la adición de números enteros	
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + b \in \mathbb{Z}$ $(-3) + (+8) = +5$ y $5 \in \mathbb{Z}$
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + b = b + a$ $(+9) + (-5) = (-5) + (+9) = +4$
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$ $((+3) + (-4)) + (-5) = (+3) + ((-4) + (-5)) = -6$
Elemento neutro	Si $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + 0 = 0 + a = a$ El número 0 se llama módulo o elemento neutro de la adición. $(+8) + 0 = +8$ $(-12) + 0 = -12$
Inverso aditivo u opuesto	Si $a \in \mathbb{Z}$ se cumple que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ Todo número entero sumado con su opuesto da como resultado cero. $(+7) + (-7) = 0$ $(-11) + (+11) = 0$

Recuerda que...

Todo número entero diferente de cero tiene signo positivo o negativo.

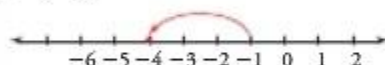
Así, -7 tiene signo negativo y 6 tiene signo positivo.

Cuando un número no está precedido de un signo, se asume que es positivo.

EJEMPLOS

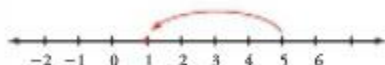
1. Realizar las sumas indicadas y representarlas en la recta numérica.

a. $(-1) + (-3)$



Por tanto, $(-1) + (-3) = -4$.

b. $5 + (-4)$



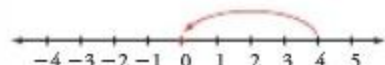
Por tanto, $(5) + (-4) = 1$.

c. $-6 + 4$



Por tanto, $(-6) + (4) = -2$.

d. $4 + (-4)$



Por tanto, $4 + (-4) = 0$.

2. Leer y resolver.

Un cardumen que está a 7 metros bajo el nivel del mar, primero baja 4 metros y luego baja 3 metros. ¿A qué nivel del mar se encuentra ahora?



Se representan los datos con números enteros:

7 m bajo el nivel del mar (-7) , baja 4 m (-4) y baja 3 m (-3) .

Para saber a qué nivel se ubica el cardumen, se suma $(-7) + (-4) + (-3)$:

$$(-7) + (-4) + (-3) = -14$$

Se suma el valor absoluto de los números y se coloca el resultado del signo de los sumandos.

Por tanto, el cardumen se encuentra a -14 metros o 14 metros bajo el nivel del mar.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Explica.

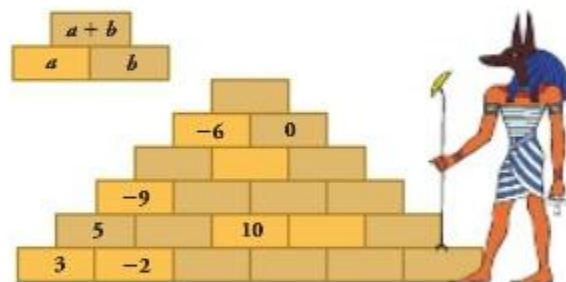
- 112.** El procedimiento para sumar dos números enteros de diferente signo.
113. El procedimiento para sumar tres o más números enteros.

E Calcula.

- 114.** $(+4) + (+12)$ **120.** $7 + 5 + (-34)$
115. $4 + (-12)$ **121.** $-17 + (-39) + 107$
116. $(-4) + (-12)$ **122.** $15 + (-48) + (-15)$
117. $(-4) + 12$ **123.** $-9 + 33 + (-108)$
118. $8 + (-19)$ **124.** $7 + (-105) + 94$
119. $(-25) + (-18)$ **125.** $33 + (-55) + 39 + 6$

R Responde. Luego, justifica tu respuesta.

- 126.** ¿Cuál es la menor suma que se puede obtener al sumar tres de los siguientes números $-12, 0, 3, 5, -6, -7$?
127. ¿Qué número se debe sumar a un número entero para que el resultado sea 0?
128. Un estudiante plantea que para sumar números enteros negativos es posible sumar sus opuestos y calcular el opuesto del resultado. ¿Es esta propuesta válida?
129. Completa la siguiente pirámide sabiendo que el número de encima se obtiene sumando los dos que aparecen en la parte inferior del mismo.



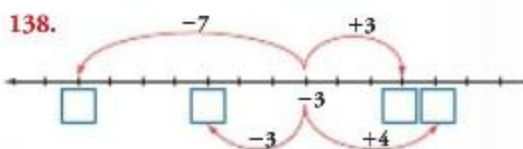
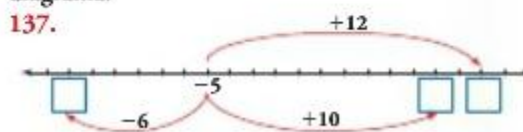
R Descubre la parte desconocida.

- 130.** $(-12) + \square = -12$ **133.** $(+24) + \square = 0$
131. $(+19) + \square = +12$ **134.** $\square + (-6) = -4$
132. $(-16) + \square = +9$ **135.** $\square + (-10) = 0$

E 136. Completa la siguiente tabla.

a	1	-1	2	-3	-2	0	3
b	1	2	-2	0	3	-1	1
c	0	2	-3	-1	1	-2	2
$a + b$							
$a + c$							
$b + (-b)$							
$(a + c) + b$							
$a + (c + b)$							

P Propón todas las sumas que resultan en cada diagrama.



S Expresa cada situación como suma de números enteros. Luego, resuélvela.

- 139.** El matemático griego Tales de Mileto nació en el año 624 a. C. y vivió 78 años. ¿En qué año murió?
140. Euclides, famoso geómetra, murió en el año 265 a. C. y vivió 60 años. ¿En qué año nació?

S Andrés tiene una heladería. A principios de este mes, pagó \$110.000 por la compra de los ingredientes para la producción de helados. Recibió \$350.000 de la venta de helados producidos y, al final del mes, pagó \$75.000 para el mantenimiento de equipos.



- 141.** ¿Cuál fue el balance de Andrés al final del mes?
142. ¿Obtuvo una ganancia o una pérdida?



2.2 Sustracción en los enteros

En la sustracción $a - b = c$, a se llama **minuendo**, b se llama **sustraendo** y c se llama **diferencia**.

Para hallar la **diferencia entre dos números enteros**, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Es decir, si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces, $a - b = a + (-b)$.

Por ejemplo, para resolver la resta $15 - 33$, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo, y a la diferencia se le antepone el signo del sumando de mayor valor absoluto, así: $15 - 33 = 15 + (-33) = -18$.

Para realizar la resta $-59 - (-88)$, se le suma al minuendo el opuesto del sustraendo. Luego, se tiene: $-59 - (-88) = -59 + (88) = 29$.

Para realizar la resta $-26 - 14$, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Por tanto, $-26 - 14 = -26 + (-14) = -40$.

Matemáticamente

¿Por qué la sustracción de números enteros cumple la propiedad clausurativa y por qué no cumple las propiedades conmutativa ni asociativa?

EJEMPLOS

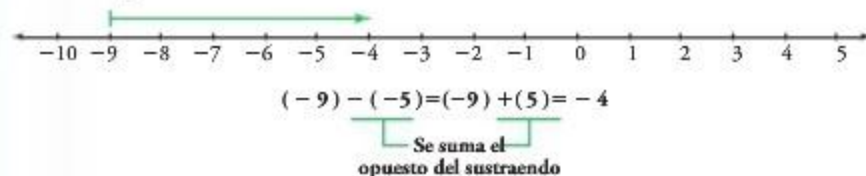
- Representar y resolver en la recta numérica la siguiente situación. En una ciudad, la temperatura en la noche fue de -5°C y en la madrugada llegó a -9°C . ¿Qué diferencia de temperaturas hubo en esas horas?



La operación que se debe realizar es $(-9) - (-5) = -4$.

$$\begin{array}{ccc} (-9) - (-5) = -4 \\ \text{Minuendo} \quad \text{Sustraendo} \quad \text{Diferencia} \end{array}$$

Ahora, se representa en la recta numérica, así:



Por tanto, la variación en la temperatura fue de -4°C , lo que equivale a decir que la temperatura disminuyó 4°C .

- Leer y resolver.

La dinastía Han, en China, se inició en el año 202 a. C. y terminó en el año 220 d. C. ¿Cuántos años duró dicha dinastía?

Para encontrar el tiempo de duración de la dinastía Han se debe restar al año final, el año inicial. Es decir, $220 - (-202) = 220 + 202 = 422$

Por tanto, esta dinastía duró 422 años en China.





Recuerda que...

Los signos de agrupación usados en matemáticas son

- () paréntesis
- [] corchetes
- { } llaves

Además, para resolver una expresión con signos de agrupación, estos deben ser eliminados de dentro hacia fuera. Para esto, se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos.

Supresión de signos de agrupación



Actividad

En algunas expresiones se combinan adiciones y sustracciones de números enteros, con signos de agrupación. Por ejemplo, $-3 + \{-[7 - (-5 + 9) - 13] + 8\}$.

Para resolver estas expresiones, se deben eliminar los signos de agrupación teniendo en cuenta las siguientes reglas:

Cuando un signo de agrupación está precedido por el signo $+$, se suprime dejando las cantidades que están en su interior con el mismo signo, así:

$$7 + (-3) = 7 - 3$$

Cuando un signo de agrupación va precedido por el signo $-$, se suprime cambiando de signo las cantidades que se encuentran en su interior, es decir:

$$-25 - (-4) = -25 + 4$$

Una vez que se suprimen los signos de agrupación, se halla el resultado de la expresión considerando que:

Dos cantidades de igual signo se suman y al resultado se le antepone el signo común.

Dos cantidades de diferente signo se restan y al resultado se le antepone el signo de la cantidad que tenga mayor valor absoluto.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes operaciones.

a. $(-10) - 7 + (-8) - (-12)$

$$\begin{aligned} (-10) - 7 + (-8) - (-12) &= -10 - 7 - 8 + 12 && \text{Se suprimen signos de agrupación.} \\ &= -25 + 12 && \text{Se suman los números de igual signo.} \\ &= -13 && \text{Se suma.} \end{aligned}$$

b. $-(-25) + (-19) - (-45) - 37$

$$\begin{aligned} -(-25) + (-19) - (-45) - 37 &= 25 - 19 + 45 - 37 && \text{Se suprimen signos de agrupación.} \\ &= [25 + 45] + [-19 - 37] && \text{Se suman los números de igual signo.} \\ &= 70 + (-56) && \text{Se suma.} \\ &= 14 \end{aligned}$$

2. Resolver la siguiente expresión $(4 - 8) - \{[7 + (2 - 4) - (-5 - 13)] - 1\}$.

$$\begin{aligned} (4 - 8) - \{[7 + (2 - 4) - (-5 - 13)] - 1\} &&& \text{Se resuelven las operaciones dentro del paréntesis.} \\ = (-4) - \{[7 + (-2) - (-18)] - 1\} &&& \text{Se suprimen signos de agrupación.} \\ = -4 - \{[7 - 2 + 18] - 1\} &&& \text{Se resuelven las operaciones dentro de los corchetes.} \\ = -4 - \{[23] - 1\} &&& \text{Se suprimen los corchetes.} \\ = -4 - \{23 - 1\} &&& \text{Se resta y se suprimen las llaves.} \\ = -4 - 22 &&& \text{Se realiza la resta.} \\ = -26 \end{aligned}$$



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

I Explica.

143. La relación entre la adición y la sustracción de números enteros.

144. El procedimiento para eliminar signos de agrupación en los números enteros.

E Resuelve.

145. $(+5) - (-6)$ 149. $(-3) - (+9)$

146. $(+5) - (+6)$ 150. $(-3) - (-9)$

147. $(-5) - (-6)$ 151. $(+3) - (+9)$

148. $(-5) - (+6)$ 152. $(+3) - (-9)$

E Realiza las operaciones.

153. $(+8) - (+9) + (-7)$

154. $(-12) - (-3) + (+5)$

155. $(+9) + (-13) - (-21)$

156. $(-17) + (+5) - (+20)$

157. $-7 - (-12) - (+3)$

E Calcula.

158. $-5 - (+11) - (-20)$

159. $9 - [(-5) - (+7)]$

160. $-7 - [(-3) - (-9)]$

161. $-11 - [(+6) - (+4)]$

162. $+8 - [(+5) - (-9)]$

163. $(+4) + [(+3) + (-7)] + (+1)$

164. $-(-3) + \{(-5) - [(+8) + (-10)]\}$

R Responde cada pregunta con base en la siguiente información. Justifica tu respuesta.

Se ubican tres números enteros a , b , c en un triángulo y se define la operación $\triangle = a - b - c$.



165. ¿Qué posibles valores puede tomar a , b , c para que el resultado de la operación sea cero?

166. ¿Es cierto que si a es negativo, el resultado de la operación triángulo siempre será negativo? Justifica tu respuesta y sugiere un ejemplo.

167. Plantea una fórmula que permita obtener cero al realizar esta operación.

D Determina el valor de verdad de cada enunciado. Justifica la respuesta.

168. La resta de dos enteros negativos es negativa.

169. La resta de dos enteros negativos es positiva.

170. La resta de dos enteros positivos es positiva.

171. La resta de dos enteros positivos es negativa.

172. Si el minuendo en una resta es -18 y el sustraendo es 7 , la diferencia es negativa.

173. Si el sustraendo es -23 y la diferencia es 15 , el minuendo es positivo.

174. La diferencia entre un número entero y su opuesto es igual a uno.

S Lee y resuelve.

175. Un comerciante hizo un negocio en la mañana y perdió \$250.000; en la tarde realizó un nuevo negocio y ganó lo suficiente para recuperar la pérdida y aumentar su capital en \$1.200.000. Representa cada valor con un número entero y determina cuánto dinero tiene si al comienzo del día tenía una deuda de \$185.000.

176. Roma, capital de Italia, fue fundada en el 753 a. C. por Rómulo y Remo, según cuenta la leyenda. Fue capital del Imperio romano desde el 27 a. C., cuando se convirtió en imperio; hasta el 395 d. C., cuando el Imperio fue dividido en dos partes.

¿Cuántos años pasaron desde su fundación hasta el inicio del Imperio?

177. La amplitud térmica es la diferencia entre la temperatura máxima y la temperatura mínima registrada en un lugar. Observa la siguiente tabla, donde se muestran las temperaturas de varias ciudades.

Ciudad	Temperatura máxima	Temperatura mínima
A	-1°C	-18°C
B	2°C	-20°C
C	12°C	-6°C

¿Cuál ciudad presentó la mayor amplitud térmica?



2.3 Multiplicación de números enteros

La multiplicación de dos números enteros a y b es un número entero c llamado **producto**.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, $a \times b = c \in \mathbb{Z}$, los términos a y b se denominan **factores** y c se llama **producto**.

Recuerda que...

Ley de los signos

$$(+)\times(+)=(+)$$

$$(-)\times(-)=(+)$$

$$(+)\times(-)=(-)$$

$$(-)\times(+)=(-)$$



Actividad

Matemáticamente

¿Por qué el producto de un número entero por -1 es igual al opuesto del número?

Para multiplicar dos números enteros se deben tener cuenta los siguientes casos:

- Si los números tienen el mismo signo, se multiplican los valores absolutos de cada número y el producto respectivo es positivo. Por ejemplo,

$$9 \times 16 = 144 \qquad (-15) \times (-6) = 90$$

- Si los números son de distinto signo, se multiplican sus valores absolutos y el producto es negativo. Por ejemplo,

$$(-21) \times 14 = -294 \qquad 25 \times (-12) = -300$$

Cuando se multiplican tres o más números enteros se multiplican sus valores absolutos sin tener en cuenta el signo. Luego, se procede así:

- Si todos los factores son positivos, entonces el producto es positivo. Por ejemplo,

$$4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 10 = 2.800$$

- Si el número de factores negativos es par, el producto es positivo. Por ejemplo,

$$(-3) \times 12 \times (-8) \times 6 \times (-2) \times (-20) = 69.120, \text{ ya que}$$

$$3 \times 12 \times 8 \times 6 \times 2 \times 20 = 69.120 \text{ y hay una cantidad par (4) de factores negativos.}$$

- Si el número de factores negativos es impar, el producto es negativo, por ejemplo:

$$(-7) \times 5 \times (-3) \times (-2) \times (-4) \times (-5) = -4.200, \text{ ya que}$$

$$7 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 \times 5 = 4.200 \text{ y hay una cantidad impar (5) de factores negativos.}$$

EJEMPLOS

Resolver las siguientes situaciones.

- a. Una tortuga marina desciende 2 metros cada minuto. ¿A qué profundidad estará después de 4 minutos?



Se representan los datos con números enteros.

Por cada minuto desciende 2 metros: -2

Después de 4 minutos: 4

Luego, la tortuga estará en: $4 \cdot (-2) = -8$

Por tanto, la tortuga estará a 8 metros de profundidad: -8 m.

- b. Un agente de acciones, observa que las acciones de la compañía que pensaba invertir hace tres semanas tuvo una pérdida de \$5.000 por acción semanalmente. ¿Cuánto dinero dejó de perder el agente por concepto de las acciones de la compañía?



Se representan los datos con números enteros.

Por cada semana la acción pierde \$5.000: -5.000

Hace tres semanas: -3

Luego, se tiene que: $(-5.000) \cdot (-3) = 15.000$

Por tanto, el agente dejó de perder \$15.000 por acción de la compañía.



Propiedades de la multiplicación de enteros

Las propiedades de la multiplicación de enteros se presentan en la siguiente tabla.

Propiedades de la multiplicación de números enteros	
Clausurativa	Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que: $a \times b \in \mathbb{Z}$ $(-6) \times (+9) = -54 \quad -54 \in \mathbb{Z}$
Elemento neutro	Si $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que: $a \times 1 = 1 \times a = a$ El 1 recibe el nombre de elemento neutro o módulo de la multiplicación. $(7) \times 1 = 7 \quad (-15) \times 1 = -15$
Conmutativa	Si $a, b \in \mathbb{Z}$, entonces se cumple que: $a \times b = b \times a$ El orden de los factores no altera el producto. $(8) \times (-7) = (-7) \times (8) = -56$
Asociativa	Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se cumple que: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ $[(2) \times (-6)] \times (4) = (2) \times [(-6) \times (4)]$ $(-12) \times (4) = (2) \times (-24) = -48$
Elemento nulo	Si $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que: $a \times 0 = 0 \times a = 0$ Todo número entero multiplicado por cero da como resultado cero. $(11) \times 0 = 0 \quad 0 \times (-9) = 0$
Distributiva	Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se cumple que: $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$ $(-3) \times (-5 + 8) = (-3) \times (-5) + (-3) \times (+8)$ $(-3) \times (3) = (15) + (-24)$ $-9 = -9$

Matemáticamente

Obtén los números enteros entre -8 y 0 utilizando los números $1, 2$ y 3 sin repetirlos y los símbolos aritméticos $+, -, \times$ y paréntesis.

EJEMPLOS

1. Descomponer el segundo factor en notación polinómica decimal. Luego, multiplicar aplicando la propiedad distributiva.

a. $(-15) \times (12)$

$$= (-15) \times [10 + 2]$$

$$= (-15) \times 10 + (-15) \times 2$$

$$= -150 + (-30)$$

$$= -180$$

b. $(-9) \times (-4.512)$

$$= (-9) \times [-4.000 + (-500) + (-10) + (-2)]$$

$$= (-9) \times (-4.000) + (-9) \times (-500) + (-9) \times (-10) + (-9) \times (-2)$$

$$= 36.000 + (4.500) + (90) + (18)$$

$$= 40.608$$



2. Escribir los factores que faltan en cada producto.

a. $\square \times 8 = -120$

El factor que falta es -15 porque $-15 \times 8 = -120$.

b. $(-6) \times \square = -60$

El factor que falta es 10 porque $(-6) \times 10 = -60$.

3. Resolver las siguientes expresiones.

a. $(-2) \times (3) + 10 - (-8) \times (-3) \times (-2)$

$$(-2)(3) + 10 - (-8)(-3)(-2) = -6 + 10 - (-48)$$

Se realizan los productos.

$$= -6 + 10 + 48$$

Se suprimen signos de agrupación.

$$= -6 + 58$$

Se suman los enteros de igual signo.

$$= 52$$

Se realiza la suma.

b. $-5 \times (6 + 3) + (2 - 3) \times 6$

$$-5 \times (6 + 3) + (2 - 3) \times 6 = -5 \times (9) + (-1) \times 6$$

Se resuelven las operaciones dentro del paréntesis.

$$= -45 + (-6)$$

Se realizan los productos.

$$= -51$$

Se suma.

Recuerda que...

$$a \times b = a \cdot b = ab$$

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde. Explica con un ejemplo.

178. ¿En qué consiste la ley de los signos?

179. ¿Cómo se halla el producto de tres o más números enteros?

180. ¿Cuál es la utilidad de la ley distributiva?

E Desarrolla los siguientes productos.

181. $4 \cdot (-8)$

185. $20 \cdot 4$

182. $(-5) \cdot 10$

186. $(-4) \cdot 13$

183. $(-12) \cdot 5$

187. $(-32) \cdot (-7)$

184. $11 \cdot (-11)$

188. $(-0) \cdot (-346)$

R 189. Completa la siguiente tabla.

a	b	Signo de $(a \cdot b)$	$(a \cdot b)$
3	-7		
-8			-32
-9	-5		
	4	-	-20
-2		+	16
	-3	+	18

R Escribe los términos que faltan y que hacen verdadera cada igualdad.

190. $-9 \times 12 = \square$

191. $\square \times 4 = -56$

192. $(-3) \times \square = 81$

193. $\square \times \square \times \square = 225$

T Determina si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero justifica tu respuesta, en caso que sea falso encuentra un contraejemplo.

194. El producto de dos números enteros menores que cero es negativo.

195. El producto de dos números enteros de diferente signo siempre es menor que uno de los factores.

196. El producto de cinco números enteros, donde solo uno de sus factores es positivo, tiene como resultado un entero positivo.

197. El producto de un número entero por -1 da como resultado su simétrico.



- R** Identifica la propiedad aplicada. Explica tu respuesta.

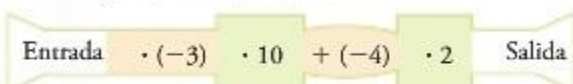
198. $(-5) \times (-3) = (-3) \times (-5)$

199. $(-1) \times [(-4) \times (-7)]$
 $= [(-1) \times (-4)] \times (-7)$

200. $(-6) \times (5 - 1) = (-6) \times 5 + (-6) \times (-1)$

201. $(-7) \times (1) = (1) \times (-7) = -7$

- R** 202. La siguiente máquina transforma cada número que ingresa, mediante diversas operaciones. Completa las tablas con las salidas que corresponden a cada entrada.



Entrada	Salida	Entrada	Salida
-1		-5	
-2		-3	
0		-7	
8		11	
3		-15	
-13		18	

- E** Resuelve las siguientes expresiones.

203. $-21 - (-7) + 4 \cdot (-7) - 12$

204. $12 - 36 + 15 \cdot -3 - 6 \cdot (-9)$

205. $-5 + 7 - (3 + 2 \cdot (-3))$

206. $[-23 + (2 \cdot (-8) - 5) + 12] - 15$

207. $[12 \cdot (-3) + 8 - 12 - (-6 + 2)] + 2$

208. $(-2) \cdot (5) \cdot (-3) \cdot (-5)(-6)$

209. $(13) \cdot (-8) \cdot (-40) \cdot (5) \cdot (4)$

210. $(24) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-2)$

- R** Opera las casillas de igual posición en los dos cuadrados. Comprueba si el resultante es un cuadrado mágico o no.

211.

2	9	-7
14	5	-3
-7	2	10

 $\times$

-1	14	0
-8	3	-8
5	-4	12

212.

-3	6	-4
3	-6	-2
-7	2	6

 $\times$

1	-2	4
0	-2	2
0	-1	4

- S** Lee y resuelve.

213. La contaminación en una ciudad cierto año fue de 12,500 mg de CO_2 . Si gracias a una campaña del nuevo alcalde se logró que decreciera 380 mg cada año durante los cuatro años de su período, ¿cuál fue la contaminación cuando el alcalde entregó su mandato?



- La temperatura de un componente químico en un laboratorio fue de -7°F a las 3 p. m., debido a una reacción en sus componentes primarios, su temperatura empezó a subir a razón de 2°F por minuto hasta las 3:45 p. m.



214. ¿Cuál fue la mayor temperatura de la reacción?
215. Si la temperatura máxima posible era de 115°C , ¿hasta qué hora podría haber estado incrementando la temperatura del compuesto?

La familia Pineda organizó un juego de cartas en el que pueden participar más de cuatro personas. En este juego los puntos perdidos se consideran puntos negativos y se escriben en un tablero con el signo $-$; los puntos ganados se escriben normalmente. Para determinar el marcador final, por turnos, cada participante debe lanzar un dado. Si el número resultante es par, sus puntos quedarán intactos; pero si es impar, el total de puntos perdidos o ganados se triplicará.

Participante	Puntos acumulados	Resultado de lanzar el dado
Daniel	-235	3
Patricio	175	1
María	110	6
Paloma	-86	3
Lorenzo	150	2
Olivia	-12	5

216. Con base en las reglas del juego, calcula la puntuación total de cada jugador.
217. Ordena a los participantes de acuerdo con el resultado que obtuvieron luego de lanzar el dado.



2.4 División de números enteros

Matemáticamente

¿Cuál es el resultado de dividir cualquier número entero entre 1?

¿Por qué el resultado de dividir 0 entre cualquier número entero diferente de 0 es 0?

La **división** es la operación que permite encontrar uno de los factores desconocidos de la multiplicación, cuando se conoce el producto y el otro factor.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ se llama **cociente exacto** de a y b al número $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot c = a$.

Para indicar la división entre a y b se utiliza la notación $a \div b$ o $\frac{a}{b}$, donde a es el dividendo y b es el divisor.

Para dividir dos números enteros se deben tener cuenta los siguientes casos:

- Si los números tienen el mismo signo, se dividen los valores absolutos de cada número y el cociente respectivo es positivo. Por ejemplo,

$$144 \div 16 = 9 \text{ porque } 16 \times 9 = 144$$

$$(-90) \div (-6) = 15 \text{ porque } (-6) \times (15) = -90$$

- Si los números son de distinto signo, se dividen sus valores absolutos y el cociente es negativo. Por ejemplo,

$$(-294) \div 14 = -21 \text{ porque } 14 \times (-21) = -294$$

$$300 \div (-12) = -25 \text{ porque } (-12) \times -25 = 300$$

EJEMPLOS

1. Verificar que la división entre números enteros no cumple las propiedades clausurativa, conmutativa y asociativa.

Clausurativa: -2 y $4 \in \mathbb{Z}$, sin embargo, la operación $-2 \div 4 \notin \mathbb{Z}$.

Conmutativa: $(-36) \div 12 = -3$ sin embargo, la operación $12 \div (-36) \notin \mathbb{Z}$.

Asociativa: $[60 \div (-5)] \div 6 = [-12] \div 6 = -2$, pero, $60 \div [(-5) \div 6]$ no tiene solución porque $(-5) \div 6 \notin \mathbb{Z}$.

2. Resolver las siguientes expresiones.

a. $\frac{(-2) \times (3) \times (10)}{5 \times (-6)}$

$$\frac{(-2) \times (3) \times (10)}{5 \times (-6)} = \frac{-60}{-30} \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= 2 \quad \text{Se divide.}$$

b. $\frac{(-1) \times (-2) \times (-3) \times (8) \times (-4)}{12 \times (-2)}$

$$\frac{(-1) \times (-2) \times (-3) \times (8) \times (-4)}{12 \times (-2)}$$

$$= \frac{192}{-24} \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= -8 \quad \text{Se divide.}$$

3. Leer y responder.

Un submarino descendió hasta una profundidad de 20 m en 4 etapas. Si en cada etapa, se sumergió la misma cantidad de metros, ¿cuántos metros descendió el submarino en cada etapa?



Primero, se representan los datos con números enteros.

El submarino desciende respecto al nivel del mar a una profundidad de 20 m: el número correspondiente es -20 .

La sumersión la realiza en 4 etapas: el número correspondiente es 4.

Luego, se realiza la división:

$$-20 \div 4 = -5.$$

Finalmente, como el resultado es un número entero negativo, entonces el submarino desciende 5 m en cada etapa.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** 218. Agrupa en parejas las fichas numeradas de manera que con cada par se pueda tener una división exacta con cociente negativo.



- E** Efectúa las siguientes divisiones.

219. $(-18) \div (-6) =$

220. $290 \div (-29) =$

221. $(-32) \div (-8) =$

222. $(-28) \div 4 =$

223. $(72) \div (9) =$

224. $(-217) \div (-7) =$

- E** Completa las siguientes secuencias según corresponda.

225. $\div 2$ $\div 5$ $\div (-1)$ $\div (-11)$
 -110 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

226. $\div (-4)$ $\div 5$ $\div (-8)$ $\div (-2)$
 -320 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

227. $\div (-7)$ $\div (-1)$ $\div (-5)$ $\div (-7)$
 -245 $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

- I** Escribe V, si la expresión es verdadera o F, si es falsa y justifica tu respuesta.

228. El cociente de la división de un entero entre el otro es siempre un número entero. ()

229. Si el cociente de la división exacta entre números enteros es positivo, el dividendo y el divisor son positivos. ()

230. El cociente de dividir un entero entre otro es siempre menor que los dos números. ()

231. El cociente de la división de un número entero entre cero es siempre cero. ()

- R** Lee, calcula y responde.

232. Un número entero multiplicado por -8 da como producto 4.800 . ¿Cuál es el número?

233. ¿Cuál es el número entero que multiplicado por 5 da -1.550 ?

- E** 234. Divide y completa la tabla de división.

$\div$	$+2$	-3	5
-60	-30		15
-240			
		-140	
-720			
960			
-1.200			
3.000			

- R** Resuelve las siguientes expresiones.

235. $\frac{(-2) \times (-1) \times 4 \times (-1) \times 6}{2 \times (-3)}$

236. $\frac{(-7) \times (12) \times (15) \times (-14)}{(-49) \times 6}$

237. $\frac{(-8) \times (-3) \times (-6) \times 5}{4 \times (-10)}$

238. $\frac{(-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8) \times (-8)}{2 \times (-64)}$

- S** Lee y responde.

239. Un tanque de agua tiene una fuga por la cual salen 8 galones por día. Cuando han salido 192 galones, el tanque deja de funcionar. ¿Cuántas horas deben pasar para que ocurra esto?

240. Un submarino desciende 50 m por minuto, para explorar el océano. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la posición de -500 m?

241. Una empresa perdió el primer año 12.000 dólares; el segundo año, el doble que el primero, y el tercer año, ganó el triple que las pérdidas de los dos años anteriores juntos. El cuarto año tuvo unos ingresos de 10.000 dólares, y el quinto año, unas pérdidas iguales a la mitad de todas las pérdidas de los años anteriores. ¿Cuál fue el saldo final de la empresa?

242. Carmen anotó los puntos que perdió y ganó durante los seis niveles de un juego de computadora.

$12, -8, 7, -5, 16, -4$

Calcula el promedio de puntos de Carmen (el promedio se obtiene dividiendo la suma de los puntos entre el número de puntajes).



Historia de las matemáticas

El problema de Waring

Edward Waring, matemático inglés, formuló en 1770 el siguiente problema: todo entero positivo puede expresarse como suma de, a lo sumo, 4 cuadrados, 9 cubos y 19 potencias cuartas. Es decir, al expresar un número entero positivo como suma de números al cuadrado, no es necesario usar 5 de ellos para expresar así ningún número.

En 1909, David Hilbert enunciaba una demostración de la conjetura conocida como problema de Waring.



Enlace web

Matemáticamente

¿Por qué $a^0 = 1$; si $a \neq 0$?

2.5 Potenciación de números enteros



Recurso imprimible

La **potenciación** es la operación que permite escribir, de forma simplificada, un producto de varios factores iguales.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}, \text{ se tiene que } \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-veces}} = a^n$$

En la expresión $a^n = b$ se identifican los siguientes términos:

a , indica el factor que se repite en la multiplicación, recibe el nombre de base.

n , indica la cantidad de veces que se repite el factor, recibe el nombre de exponente.

b , indica el resultado de la multiplicación, recibe el nombre de potencia.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ (-3)^5 = -243 \\ \text{Base} \qquad \qquad \text{Potencia} \end{array}$$

Para hallar el valor de una potencia, se multiplica el valor absoluto de la base por sí mismo, tantas veces como indique el exponente y para determinar el signo de la potencia se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

- Si la base es positiva y el exponente es par o impar, la potencia es positiva.

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}^+$ y n es par o impar, entonces $a^n \in \mathbb{Z}^+$.

Por ejemplo: $5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ o $6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

- Si la base es negativa y el exponente es par, la potencia es positiva.

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}^-$ y n es par, entonces $a^n \in \mathbb{Z}^+$.

Por ejemplo: $(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$.

- Si la base es negativa y el exponente es impar, la potencia es negativa.

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}^-$ y n es impar, entonces $a^n \in \mathbb{Z}^-$.

Por ejemplo: $(-7)^3 = (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) = -343$.

EJEMPLOS

- Escribir cada expresión usando exponentes y determinar la potencia.

a. $2 \cdot 2 \cdot 2$

$2 \cdot 2 \cdot 2$ Multiplicación dada.

$= 2^3$ Se multiplica 2, tres veces, se expresa como a^n .

$= 8$ Se halla la potencia.

b. $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$ Multiplicación dada.

$= (-1)^4$ Se multiplica (-1) , cuatro veces, se expresa como a^n .

$= 1$ Se halla la potencia.

- Escribir en forma de producto las siguientes potencias y determinar los resultados.

a. $(-4)^3$

$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$ Se expresa como producto.

$= 16 \cdot (-4)$ Se multiplica.

$= -64$

b. 9^4

$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ Se expresa como producto.

$= 81 \cdot 81$ Se multiplica.

$= 6.561$



Propiedades de la potenciación de enteros

Recurso
imprimibleAmpliación
multimedia

Las propiedades de la potenciación en los enteros se pueden comprobar con base en las propiedades de la multiplicación y son las siguientes:

Propiedades de la potenciación	
Producto de potencias de igual base	Si a es un número entero; m, n son números naturales, se cumple que: $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Para multiplicar dos o más potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Por ejemplo: $(-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^{4+2} = (-3)^6 = 729$ o $(-5)^2 \times (-5)^4 = (-5)^{2+4} = (-5)^6 = 15.625$.
Cociente de potencias de igual base	Si a es un número entero; m, n son números naturales, se cumple que: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ para $m > n$. Para dividir dos potencias de igual base, se deja la base y se restan los exponentes. Por ejemplo, $(-3)^4 \div (-3)^2 = (-3)^{4-2} = (-3)^2 = 9$ o $\frac{(-5)^6}{(-5)^2} = (-5)^{6-2} = (-5)^4 = 625$.
Potencia de una potencia	Si a es un número entero; m, n son números naturales, se cumple que: $(a^m)^n = a^{m \times n}$. Para determinar el resultado de una potencia elevada a un exponente, se deja la base y se multiplican los exponentes. Por ejemplo, $(-3^4)^2 = (-3)^{4 \times 2} = (-3)^8 = 6.561$ o $(3^4)^2 = (3)^{4 \times 2} = (3)^8 = 6.561$.
Potencia de un producto	Si a, b son números enteros; m es un número natural, se cumple que $(a \times b)^m = a^m \times b^m$. El resultado del producto de dos enteros elevado a un exponente es el producto de las potencias de cada uno de los factores. Por ejemplo, $(-4 \times 3)^2 = (-4)^2 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$ o $(-4 \times 3)^3 = (-4)^3 \times 3^3 = -64 \times 27 = -1.728$.
Potencia de un cociente	Si a, b son números enteros; $b \neq 0$; m es un número natural, se cumple que: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$. El resultado del cociente exacto de dos enteros elevados a un exponente es el cociente entre las potencias de los dos enteros. Por ejemplo, $\left(-\frac{8}{4}\right)^3 = \frac{(-8)^3}{(4)^3} = \frac{-512}{64} = -8$.

EJEMPLOS

Expresar como una sola potencia cada expresión.

a. $(-5)^6 \times (-5)^2 \times (-5)^3$

$(-5)^6 \times (-5)^2 \times (-5)^3 = (-5)^{11}$ Se aplica propiedad de producto de potencias de igual base.

b. $\frac{(5^3)^2 \times 5^4 \times (5^4)^6}{5^7 \times (5^2)^5}$

$\frac{(5^3)^2 \times 5^4 \times (5^4)^6}{5^7 \times (5^2)^5} = \frac{5^6 \times 5^4 \times 5^{24}}{5^7 \times 5^{10}}$ Se aplica propiedad de potencia de una potencia.

$= \frac{5^{34}}{5^{17}} = 5^{17}$ Se aplican propiedades de potencias de igual base.

Por tanto, $\frac{(5^3)^2 \times 5^4 \times (5^4)^6}{5^7 \times (5^2)^5} = 5^{17}$.

Recuerda que...

$-a^b \neq (-a)^b$ ya que en el primer caso el menos no está afectado por el exponente.

Por ejemplo:

$-3^2 = -3 \times 3$
 $= -9$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3)$
 $= 9$



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto **A** Argumento **P** Propongo **E** Ejercito **R** Razono **S** Soluciono problemas

I Escribe en forma de potencia cada enunciado. Luego, calcula la potencia.

243. El cuadrado del número entero -3 .

244. El cubo del número entero -5 .

245. La quinta potencia de 2.

E Expresa como potencia.

246. $(-6)(-6)(-6)(-6) = ______$

247. $(+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = ______$

248. $(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = ______$

249. $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1) = ______$

250. $(+5)(+5)(+5)(+5)(+5)(+5)(+5)(+5)(+5) = ______$

E Calcula las siguientes potencias.

251. $(-4)^2$

256. $(5)^4$

252. $(-2)^3$

257. $(-6)^3$

253. $(7)^2$

258. $(-100)^0$

254. $(-3)^4$

259. $(-1.000)^1$

255. $(4)^3$

260. $(-10)^3$

R Responde. Justifica tu respuesta.

261. ¿Cuál es el signo de la potencia $(-3)^{27}$?

262. ¿En la igualdad $(-1)^n = -1$, el exponente puede ser cero?

263. ¿Es posible afirmar que $(-4)^2$ es lo mismo que -4^2 ?

R Corrige las proposiciones que son falsas.

264. $(-3)^2 > (-2)^2$

267. $6^2 > (-6)^2$

265. $8^0 > (-4)^0$

268. $6^3 \cdot 6^4 < 6^8$

266. $(-3)^3 > (-2)^3$

269. $(-3)^4 < (-9)$

P Encuentra el exponente que se desconoce en cada caso.

270. $2^{\square} \cdot 2^5 = 2^9$

273. $[(5)^3]^{\square} = 125$

271. $(-12)^{\square} = 1$

274. $(-5)^{\square} = 25$

272. $6^7 \div 6^{\square} = 6^2$

275. $7^8 \div 7^{\square} = 7^3$

R Expresa como una sola potencia.

276. $4^5 \cdot (4^3)^2 \cdot [(4^4)^5]^2 = 4^{\square}$

R 277. Cinco fichas están dispuestas en un rectángulo. Si el producto de los números que están sobre las diagonales es igual, determina el número que corresponde a la ficha con el símbolo $\blacktriangle$.

2		$\blacktriangle$
	$(-3)^3$	
$(-1)^5$		$(-1)^{10}$

P Observa. Luego, resuelve.

$$(((-3)^5)^8)^0 = ((-3)^5)^1 = (-3)^5 = -243$$

278. $((2)^3)^2)^0$

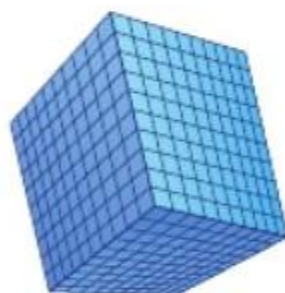
280. $((2)^3)^1)^6$

279. $((((-3)^2)^3)^3)^0$

281. $((((-4)^3)^1)^7)^1$

S Lee y responde.

Un cubo de 1 dm de arista está formado por pequeños cubos de 1 cm de arista.



282. ¿Cuántos cubos pequeños forman el cubo grande?

283. Si se colocaran los cubos pequeños uno encima del otro, ¿qué altura alcanzarían?

284. María trajo de su viaje tres paquetes con tres cajas cada uno, cada caja tiene tres bolsas y cada bolsa, dos lápices. ¿Cuántos lápices trajo María de su viaje?

S Lee y resuelve.

285. Sean $a \clubsuit b = a^2 - b^2$; $a \diamond b = (a - b)^2$ y

$$a \spadesuit b = \frac{a+b}{a-b}$$

Calcula $E = \frac{1 \spadesuit 2}{(3 \diamond 4)(4 \clubsuit 2)}$.



2.6 Radicación de números enteros

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación, ya que permite encontrar la base cuando se conocen el exponente y la potencia.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ la raíz n -ésima de a se nota $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$.

En la expresión $\sqrt[n]{a} = b$ se identifican los siguientes elementos:

- El **índice radical** es n .
- La **cantidad subradical** es a .
- El **signo radical** es $\sqrt{}$.
- La **raíz** es b .

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \rightarrow \sqrt[3]{-64} = -4 \\ \text{Cantidad subradical} \rightarrow \quad \quad \quad \text{Raíz} \end{array}$$

Para determinar la raíz n -ésima de un número entero se deben tener en cuenta las siguientes reglas:

- La raíz n -ésima de un número positivo es un número positivo.

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\sqrt[n]{a} > 0$.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{729} = 9$ ya que $9^3 = 729$.

En el caso n par, para evitar ambigüedad $\sqrt[n]{a} = b$, donde b es positivo ya que puede tomar dos valores. Por ejemplo:

Como $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$, entonces, $\sqrt[4]{16} = 2$ o $\sqrt[4]{16} = -2$.

Sin embargo, se tiene en cuenta la **raíz positiva**, en el momento de obtener la raíz.

- Si n es un número impar y a es un número negativo, entonces, $\sqrt[n]{a}$ es negativa.

Es decir, si $a \in \mathbb{Z}^-$ y n es impar, entonces, $\sqrt[n]{a} < 0$.

Por ejemplo: $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$.

- Si n es un número par y a es un número negativo, entonces, $\sqrt[n]{a}$ no es entera.

Es decir, $a \in \mathbb{Z}^-$ y n es par, entonces, $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{Z}$.

Por ejemplo: $\sqrt[4]{-81} \notin \mathbb{Z}$, ya que $3^4 = 81$ y $(-3)^4 = 81$. En este caso, $\sqrt[4]{-81}$ no tiene solución, ya que no existe un número entero que elevado a la cuarta potencia dé como resultado -81 .

Recuerda que...

Cuando se determina la raíz con índice 2 de un número b , se dice que se calcula la raíz cuadrada del número. Es decir, $\sqrt{b}$ se lee, raíz cuadrada de b . En este caso no es necesario escribir el índice, por ejemplo: $\sqrt{9} = 3$.

Matemáticamente

¿Qué diferencia hay entre las expresiones $-\sqrt{25}$ y $\sqrt{-25}$?

Matemáticamente

¿Existe en los números enteros la raíz cuadrada de cualquier número entero positivo?

EJEMPLOS

1. Expresar en forma de radicación la siguiente potencia $(-6)^5 = -7.776$.

Como, $b^n = a$, se tiene que $\sqrt[n]{a} = b$.

Entonces, la potencia $(-6)^5 = -7.776$ en forma radicación es:

$$\sqrt[5]{-7.776} = -6.$$

2. Calcular las siguientes raíces realizando la comprobación de la respuesta obtenida.

a. $\sqrt{169}$

$\sqrt{169} = 13$ ya que $13^2 = 169$.

b. $\sqrt[3]{-125}$

$\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que $(-5)^3 = -125$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde.

286. ¿Cuál es el significado de la radicación en los números enteros?
287. ¿Cuál es la diferencia entre extraer la raíz cuadrada y la raíz cúbica?
288. ¿Es posible obtener la raíz n -ésima de cualquier número entero?

E Calcula las raíces.

289. $\sqrt{81}$ 293. $\sqrt{100}$ 297. $\sqrt{25}$
290. $\sqrt[3]{64}$ 294. $\sqrt[3]{-64}$ 298. $\sqrt[3]{-125}$
291. $\sqrt[3]{32}$ 295. $\sqrt[3]{-128}$ 299. $\sqrt[3]{-1}$
292. $\sqrt[4]{1}$ 296. $\sqrt[4]{625}$ 300. $\sqrt[4]{243}$

E Escribe en cada recuadro el número que corresponde para que se cumpla la igualdad.

301. $\square^3 = +8$ 305. $\square^3 = -27$
302. $\square^3 = -8$ 306. $\square^2 = +25$
303. $\square^5 = -32$ 307. $\square^6 = +64$
304. ¿En qué casos hay más de una respuesta?

E Efectúa aplicando propiedades.

308. $\sqrt{64 \cdot 121}$ 316. $\sqrt[3]{(-32)(-243)}$
309. $\sqrt[3]{(-125)(343)}$ 317. $\sqrt{729 \div 81}$
310. $\sqrt[3]{7^6 \cdot 2^{12}}$ 318. $\sqrt[3]{(-3)^{10}(-5)^5}$
311. $\sqrt[3]{(-8)^{12} \div (-8)^6}$ 319. $\sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 4^4}$
312. $\sqrt[4]{3^{23}}$ 320. $\sqrt[25]{4^{52}}$
313. $\sqrt[8]{6^{42}}$ 321. $\sqrt[32]{12^{43}}$
314. $\sqrt[12]{(-7)^{62}}$ 322. $\sqrt[4]{(-3)^{42}}$
315. $\sqrt[8]{(-2)^{25}}$ 323. $\sqrt[16]{(-1)^{44}}$

R Demuestra que la expresión es falsa, dando un ejemplo con números enteros donde se cumpla y donde no se cumpla. Justifica tu respuesta.

324. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x+y}$
325. $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x}$

I Determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones. Justifica cada respuesta.

326. Todos los números negativos tienen raíz cuarta.
327. Las raíces pares de números negativos pertenecen a los números naturales.
328. Cero tiene raíz cuadrada exacta.
329. Las raíces de índice par de cantidades negativas son enteros.
330. Todo número entero tiene raíz cuadrada exacta.

R Calcula el valor que debe ir en cada casilla.

331. $\sqrt[3]{-125} = \square$ 334. $\sqrt{\square} = 12$
332. $\square\sqrt{-64} = -4$ 335. $\square\sqrt{128} = 2$
333. $\sqrt[3]{243} = \square$ 336. $\sqrt{\square} = 15$

S Lee y resuelve.

337. En el centro de una plaza hay un jardín cuadrado de 625 m^2 de área. Si el lado de la plaza mide 95 metros, ¿cuánto mide de ancho la vereda que bordea el jardín central?
338. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de 1.152 m^2 , si su largo es el doble del ancho?
339. A un depósito de 16 m de largo, 6 m de profundidad y 18 m de ancho, se le quiere dar forma cúbica, sin que varíe su capacidad. ¿Qué alteración sufrirán sus dimensiones?
340. La altura de una caja es el cuádruplo de su ancho y de su largo. Si su volumen es 500 cm^3 , ¿cuáles son las dimensiones de la caja?

341. Lucio tiene un pedazo de tela rectangular con cuadros y quiere hacer una toalla cuadrada con él. Para no tener



ninguna pérdida de tela, él debe cortarla en tres secciones, y en los recortes no debe romper ninguna cuadrícula y no debe ser discontinua.

Si cada porción cortada será añadida lateralmente, ¿cómo puede Lucio realizar tal tarea?



3. Polinomios aritméticos con números enteros



Recurso
imprimible



Actividad



Ampliación
multimedia

Un **polinomio aritmético** es una expresión matemática en la que aparecen indicadas varias operaciones que pueden tener o no tener signos de agrupación.

Por ejemplo:

$-4 + 3^2 \cdot 12 \div 36 - \sqrt[3]{125}$ es un polinomio sin signos de agrupación.

$1 - \{-33 + [(-38 - 22) \div (-5) + (-4)^3]\}$ es un polinomio con signos de agrupación.

Para solucionar correctamente un polinomio aritmético es necesario tener en cuenta los siguientes casos:

- Para resolver una expresión sin signos de agrupación, primero se determinan las potencias y las raíces; luego, las multiplicaciones y las divisiones en su orden respectivo; finalmente, las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.
- Para desarrollar una expresión con signos de agrupación, estos deben ser eliminados de dentro hacia fuera. Para esto, se resuelven las operaciones indicadas dentro de cada uno de ellos siguiendo el orden sugerido en el punto anterior.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes expresiones.

a. $(-3)^2 \cdot (-4) + 5^2 \cdot 2 - 12 \cdot (-4)^2 \div 24$

$$(-3)^2 \cdot (-4) + 5^2 \cdot 2 - 12 \cdot (-4)^2 \div 24$$

$$= 9 \cdot (-4) + 25 \cdot 2 - 12 \cdot 16 \div 24 \quad \text{Se calculan las potencias.}$$

$$= -36 + 50 - 192 \div 24 \quad \text{Se realizan los productos.}$$

$$= -36 + 50 - 8 \quad \text{Se divide.}$$

$$= 14 - 8 = 6 \quad \text{Se suma y se resta.}$$

Por tanto, $(-3)^2 \cdot (-4) + 5^2 \cdot 2 - 12 \cdot (-4)^2 \div 24 = 6$.

b. $-\{1 + [22(-7 - 11) \div (-3)] + \sqrt{85 + 59}\} - [6 + (9 + 1^8 \cdot 4) + 8]$

$$-\{1 + [22(-7 - 11) \div (-3)] + \sqrt{85 + 59}\} - [6 + (9 + 1^8 \cdot 4) + 8]$$

$$= -\{1 + [22(-18) \div (-3)] + \sqrt{144}\} - [6 + (13) + 8] \quad \text{Se eliminan paréntesis.}$$

$$= -\{1 + [-396 \div (-3)] + 12\} - [6 + 13 + 8] \quad \text{Se multiplica y se halla la raíz.}$$

$$= -\{1 + [132] + 12\} - [27] \quad \text{Se divide y se suma.}$$

$$= -\{145\} - [27] \quad \text{Se realiza la suma.}$$

$$= -145 - 27 \quad \text{Se suprimen signos de agrupación.}$$

$$= -172 \quad \text{Se realiza la resta.}$$

Por tanto,

$$-\{1 + [22(-7 - 11) \div (-3)] + \sqrt{85 + 59}\} - [6 + (9 + 1^8 \cdot 4) + 8] = -172$$



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **M** Modelo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I 342. Escribe la secuencia, según la prioridad que se debe respetar para resolver un polinomio aritmético. Explica con un ejemplo.

- Calcular las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.
- Calcular las potencias y las raíces de izquierda a derecha.
- Calcular las multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
- Resolver los paréntesis desde el interior hasta el exterior.

E Elimina los signos de agrupación.

343. $-[11 + 42 \div 7 - (3 \cdot 2 - 7)] - (-12 - 7)$

344. $-(-[-(-1 \cdot 3 \cdot 2 - 15) \div 3] + 2) - 1$

345. $[-4 \cdot (4 + 3) + (1 - 4 \cdot 9)] - (-11)$

346. $(9 + 3 \times 5) - [8 + 2 + (-46 + 4^2 \times 3)]$

347. $5 - (7 + 8 \times 6) \div [4 - 19 + (6 + 2^2 \times 5)]$

348. $8 + [7 + 1 + (3 + 4^2 \times 4)] \div (3 + 4 \times 3)$

349. $(13 + 7 \times 5) \div [-6 + (9 + 1^2 \times 3)] + 8$

E Resuelve los siguientes polinomios aritméticos.

350. $\sqrt[3]{-8} - 5^2 + 25 \div -5$

351. $\sqrt{4 \times (-5)^2 - (-3)^2 - (-2) \times (-5)}$

352. $(-2)^3 \div (-2) + \sqrt{100} \div 2$

353. $[8 - (5 + 2)^2 + 4^2] \div (2 + 3)^2$

354. $4^2 \div \sqrt{16} + (-10 \cdot 6 \cdot \sqrt[3]{1.000})$

355. $\sqrt{17 + \sqrt[3]{-512} \times \sqrt{64} \times (-2)^3}$

356. $\frac{\sqrt{\sqrt{64} - \sqrt[3]{-512}}}{\sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{256}}$

R Completa con paréntesis cada expresión, para que sea verdadera.

357. $36 \div -2 + 1 - 7 \cdot 2 = -31$

358. $36 \div -2 + 1 - 7 \cdot 2 = -50$

359. $36 \div -2 + 1 - 7 \cdot 2 = -30$

M Expresa cada enunciado como un polinomio aritmético. Luego, resuelve.

360. El producto de -3 y 6 , más el doble de -8 .

361. El cubo de -7 , menos el cociente de 8 y -4 .

362. La raíz cuadrada de 36 multiplicada con la raíz cúbica de -27 .

363. El triple de 12 , más la tercera parte de la raíz cuarta de 81 .

E Si $a \$ b = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ y $a \% b = a^b$, calcula:

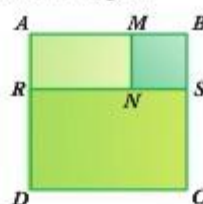
364. $(25 \$ 36) + (49 \$ 121)$

365. $(3 \% 4) - (81 \$ 16)$

366. $(-5 \% 3) + (-2 \% 4) - (64 \$ 9)$

367. $\sqrt{(81 \$ 25)} - \sqrt[3]{(5 \% 3)}$

R Observa la figura.



Área $ABCD = 8$

1. Área $AMNR = p$

2. Área $MBSN = q$

Utiliza la información anterior para construir, en cada caso, una figura cuya área está dada por cada una de las siguientes expresiones.

368. $8 - (p + q)$

372. $8 + 2 \times (p + q)$

369. $8 - (p + q) \div 2$

373. $8 - p + q$

370. $8 + [(-p) \div 2]$

374. $4 + (p + q) \div 2$

371. $8 + (p + q) \div 2$

375. $(8 + 2 \times (p + q)) - q$

S Lee y resuelve.

La temperatura se puede medir no solo en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$), sino también en grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). La diferencia entre ellos está dada por el referente en el cual fijaron cada uno el 0° en su escala. De esta manera es posible utilizar la siguiente fórmula para transformar uno en el otro sin dificultades:

$$^{\circ}\text{C} = [5 \cdot (^{\circ}\text{F} - 32)] \div 9$$

376. Escribe los pasos del procedimiento para transformar $^{\circ}\text{F}$ en $^{\circ}\text{C}$.

377. ¿A cuántos $^{\circ}\text{C}$ equivalen 14°F ?



4. Ecuaciones con números enteros

En matemáticas y otras disciplinas es muy común que se necesite relacionar dos expresiones mediante el signo igual "=", generando así lo que se conoce como una **igualdad**. Si en las expresiones que se relacionan aparecen uno o más valores desconocidos, se obtiene una ecuación.

Por ejemplo, las expresiones $5 + 3 = 8$ o $-7 + 9 = 2$ son igualdades numéricas, mientras que expresiones como $x + 3 = 8$ o $-7 + m = 2$ son ecuaciones, donde los valores desconocidos se representan con las letras x y m , respectivamente.

Una **ecuación** es una igualdad en la que se desconoce algún término al que se le denomina **variable** o **incógnita**. La incógnita se representa generalmente con una letra minúscula.

Partes y elementos de una ecuación

En una ecuación es importante reconocer varios elementos que facilitan su proceso de solución, los cuales son:

- **Miembros:** son las expresiones que hay a cada lado de la igualdad.
- **Incógnita:** es la letra o símbolo cuyo valor se desconoce.
- **Coefficientes:** son los valores numéricos que multiplican a las incógnitas.
- **Términos independientes:** son las expresiones solamente numéricas.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} \text{Incógnita} \\ \text{Primer miembro} \quad \underbrace{2n - 4} = \underbrace{16}_{\text{Segundo miembro}} \end{array}$$

En la anterior expresión, el primer miembro tiene dos términos que son $2n$ y -4 , mientras que en el segundo miembro hay un solo término que es 16.

Solucionar una ecuación equivale a encontrar el valor que representa la incógnita, para lo cual es útil emplear la propiedad uniforme de las igualdades.

4.1 Propiedad uniforme



Ampliación
multimedia

Al proceso matemático que se emplea para solucionar una ecuación se le llama **despejar la ecuación** y permite encontrar el conjunto de valores que puede tomar la incógnita, para hacer cierta la igualdad.

Despejar una ecuación consiste en transformar la ecuación dada en otras equivalentes, hasta lograr que la incógnita sea uno de los miembros y el otro miembro sea el valor que representa, para ello se utiliza la propiedad fundamental de las ecuaciones, la cual se conoce como propiedad uniforme de las igualdades.

Si en una igualdad, a los dos miembros se les suma, resta, multiplica o divide por un mismo número, la igualdad se conserva, esto se conoce como **propiedad uniforme de las igualdades** y se puede representar como:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } a = b \text{ entonces, } a + c = b + c & a - c = b - c \\ & a \cdot c = b \cdot c \quad a \div c = b \div c, \text{ si } c \neq 0. \end{array}$$



4.2 Ecuaciones de la forma $x \pm b = c$

Para resolver ecuaciones de la forma $x \pm b = c$, aplicando la propiedad uniforme de las igualdades, se debe sumar en ambos miembros de la ecuación el opuesto del término independiente b . Por ejemplo, la ecuación $x - 2 = -8$ es de la forma $x - b = c$, donde $b = 2$ y $c = -8$. Luego, se debe aplicar la propiedad uniforme sumando 2, así:

$$x - 2 = -8 \quad \text{Ecuación.}$$

$$x - 2 + 2 = -8 + 2 \quad \text{Se suma 2 a ambos lados de la ecuación.}$$

$$x + 0 = -6 \quad \text{Se realizan las operaciones indicadas.}$$

$$x = -6 \quad \text{Se aplica propiedad del elemento neutro respecto a la adición.}$$

Para comprobar que la solución de una ecuación es la correcta, se reemplaza el valor de la incógnita en la ecuación dada y se verifica la igualdad.

En la ecuación $x - 2 = -8$, se obtuvo que $x = -6$. Luego, se verifica como sigue:

$$x - 2 = -8 \quad \text{Ecuación.}$$

$$(-6) - 2 = -8 \quad \text{Se reemplaza } x \text{ por } -6.$$

$$-8 = -8 \quad \text{Se resta y se verifica la igualdad.}$$

Por tanto, $x = -6$ sí es la solución de la ecuación $x - 2 = -8$.

4.3 Ecuaciones de la forma $a \cdot x = c$

Para resolver ecuaciones de la forma $ax = c$, se aplica la propiedad uniforme de las igualdades, dividiendo cada miembro de la ecuación entre el coeficiente de la incógnita.

Por ejemplo, la ecuación $2x = -18$ es de la forma $a \cdot x = c$, donde $a = 2$ y $c = -18$. Luego, se debe aplicar la propiedad uniforme dividiendo entre 2, así:

$$2x = -18 \quad \text{Ecuación.}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-18}{2} \quad \text{Se dividen ambos lados de la ecuación entre 2.}$$

$$1 \cdot x = -9 \quad \text{Se realizan las divisiones indicadas.}$$

$$x = -9 \quad \text{Se aplica propiedad del elemento neutro respecto a la multiplicación.}$$

Luego, se comprueba que $x = -9$ es la solución de la ecuación.

4.4 Ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$

En las ecuaciones de la forma $ax \pm b = c$ se utilizan las propiedades de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita. Por ejemplo, la ecuación $4n + 2 = 10$ es de la forma $ax \pm b = c$, donde $a = 4$, $b = 2$ y $c = 10$ y se resuelve como sigue:

$$4n + 2 = 10 \quad \text{Ecuación.}$$

$$4n + 2 - 2 = 10 - 2 \quad \text{Se resta 2 en ambos miembros de la ecuación.}$$

$$4n = 8 \quad \text{Se aplica propiedad del elemento neutro respecto a la adición.}$$

$$\frac{4n}{4} = \frac{8}{4} \quad \text{Se divide entre 4 en ambos miembros de la ecuación.}$$

$$n = 2 \quad \text{Se realizan las operaciones respectivas.}$$

Luego, se comprueba que $n = 2$ es la solución de la ecuación.

Historia de las matemáticas



Alrededor de 1800 a. C., los egipcios sabían resolver ecuaciones. En esa época ya existía un método para solucionar ecuaciones de primer grado llamado el "método de la falsa posición".



Matemáticamente

Expresa el perímetro de los polígonos cuyos lados tienen la misma medida, como se muestra en la figura.



Planteamiento y solución de problemas mediante ecuaciones

Por medio de las ecuaciones es posible resolver problemas que involucran números enteros. Para ello, hay que tener en cuenta los pasos para la solución de problemas:

Interpretar el enunciado: consiste en identificar los datos conocidos del problema y establecer el dato que se busca calcular. Se debe asignar una letra (o incógnita) para el dato desconocido.

Plantear y resolver la ecuación: se debe escribir el problema en forma de ecuación. Luego, se resuelve la ecuación.

Comprobar el resultado: se debe verificar si la solución cumple las condiciones del problema. Luego, se redacta la respuesta en términos de la información del problema.

EJEMPLOS

1. Traducir cada expresión numérica en forma de ecuación.

- a. El triple de un número, más el doble de 8.

Se expresa el número como: n .

El triple de un número se expresa como $3n$.

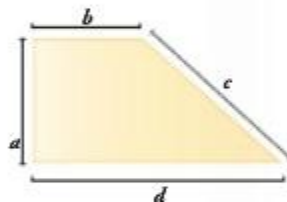
Por tanto, el triple de un número, más el doble de 8 se expresa como $3n + 2(8)$.

- b. El perímetro del cuadrilátero que se muestra en la figura.

Se representa el perímetro como P .

Por tanto, el perímetro del cuadrilátero está dado por:

$$P = a + b + c + d$$



2. Leer y resolver.

Por la compra de cuatro cuadernos de igual valor y una regla se pagan \$45.000. Si el valor de la regla es \$7.000, ¿cuál es el valor de cada cuaderno?

Primero, se interpreta el enunciado. Se asigna la variable x al valor de cada cuaderno.

Valor de cada cuaderno: x

Valor de los cuatro cuadernos: $4x$

Luego, se plantea y se resuelve la ecuación. Como el valor total es \$45.000 y el valor de la regla es \$7.000, se tiene que:

$$4x + 7.000 = 45.000$$

Se plantea la ecuación.

$$4x + 7.000 - 7.000 = 45.000 - 7.000$$

Se resta 7.000 en ambos miembros de la ecuación.

$$4x = 38.000$$

Se realiza la resta.

$$\frac{4x}{4} = \frac{38.000}{4}$$

Se dividen entre 4 ambos miembros de la ecuación.

$$x = 9.500$$

Se realizan las operaciones indicadas.

Luego, el valor de cada cuaderno es \$9.500.

Por último, se comprueba la solución. Como el valor de cada cuaderno es \$9.500 y el de la regla es \$7.000, entonces, el valor que se debe pagar es $4 \times 9.500 + 7.000 = 45.000$, por tanto, la solución es correcta.



Afianzo COMPETENCIAS

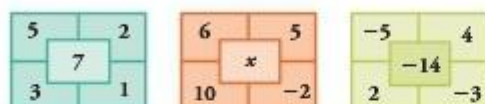
I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Observa la secuencia. Luego, halla el valor indicado.

378. x



379. $2x$



R 380. Analiza los datos de cada columna, y determina el valor de $x - 2$.

1	1	2
2	4	4
3	x	6

E Resuelve las siguientes ecuaciones.

381. $x + 3 = 7$

385. $5x = 20$

382. $9 + x = 12$

386. $3x = 29 - 8$

383. $2x = 19 - 5$

387. $x - 21 = 86$

384. $x - 8 = 12$

388. $(x + 2) - 1 = 7$

A 389. Indica cuál de los siguientes números es mayor, si k es un número negativo. Justifica tu respuesta.

a. $3 + k$

c. $3 - k$

b. $3 \cdot k$

d. $3 \div k$

R 390. ¿Cuánto pesa la manzana si la balanza está en equilibrio?



R Observa la secuencia. Luego, responde.

Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
1 star	2 stars	3 stars	4 stars
1 star	2 stars	3 stars	4 stars

391. Determina la figura que tiene 2.998 estrellas.

P Representa cada balanza mediante una ecuación. Luego, resuelve.

392.



393.



394.



S Resuelve utilizando ecuaciones.

395. El doble de la edad de Pablo es igual a la edad que tendrá Raquel dentro de 10 años. Si Raquel tiene 16 años, ¿qué edad tiene Pablo?

396. Si Paula tiene 15 dulces más que Gabriela, que tiene 26 dulces, ¿cuántos dulces tiene Paula?

S Alicia y Cindy empezaron un programa de entrenamiento para participar en el campeonato de karate. Alicia pesa 50 kg y espera aumentar 2 kg cada semana. Cindy pesa 71 kg y espera bajar 1 kg por semana.

397. Si el plan funciona, ¿en cuántas semanas llegarán a pesar lo mismo?

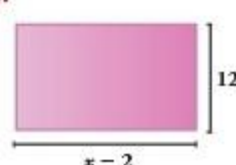
398. ¿Cuánto pesarán en ese momento?

S Encuentra la medida del lado de cada figura si se sabe que el perímetro de cada una es 60 cm.

399.



400.



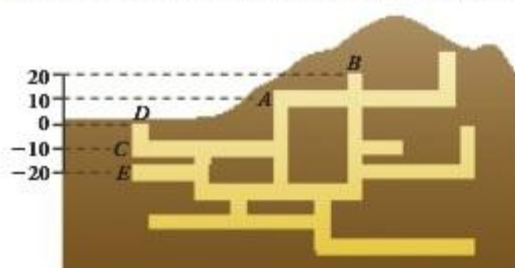


El conjunto de los números enteros

401. Colorea con rojo las expresiones que se asocian con números positivos y con verde las que se asocian con números negativos.

aumenta	tengo	resta	disminuye
menos que	bajo	debe	sobre
	más que	añade	

402. Indica el nivel al que se encuentra cada punto.



A. _____ C. _____ E. _____
D. _____ B. _____

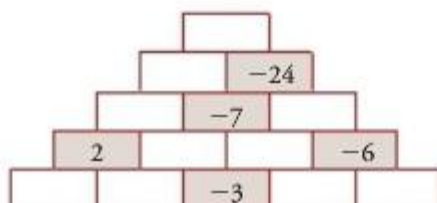
- Ordena los números como se indica.

403. De menor a mayor: $-3, 25, -16, -8, 5, 0, -9$.

404. De mayor a menor: $7, -1, 2, -50, 26, -3, 6, 13$.

Operaciones en $\mathbb{Z}$

405. Completa la pirámide si el número de cada casilla debe ser la suma de los dos números de las casillas sobre las que está apoyado.



406. Halla el valor de $A \times B$, teniendo en cuenta que:

$$A = (-7 + 9) \times 2 \text{ y } B = (-25 + 10) \div 3$$

$$A \times B = \underline{\hspace{2cm}}$$

407. Completa el cuadrado con los números del -6 al 2 , de tal forma que la suma de cada fila y columna sea la misma.



408. Une con una línea las expresiones equivalentes.

$$a^4 \cdot a^6 \cdot a$$

$$a^8$$

$$a^{15} \times a^{10}$$

$$a^{16}$$

$$[(a^8)]^2$$

$$a^{11}$$

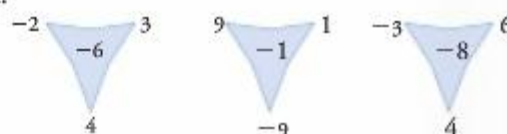
$$\{[(a^3)]^6\}^{10}$$

$$1$$

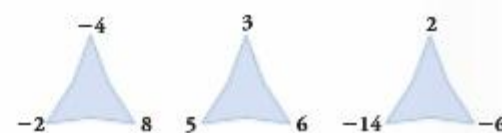
$$(-a)^{2^3}$$

$$a^5$$

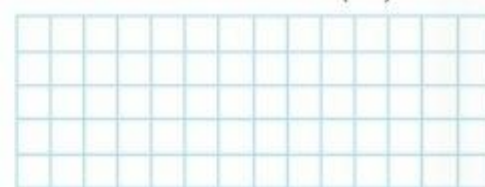
En la siguiente secuencia los números que están en el interior de cada triángulo se obtienen a partir de los números que lo rodean siguiendo siempre la misma regla, en la que se aplican la multiplicación y la división.



409. Determina los números que van en el interior de los siguientes triángulos aplicando la misma regla.



410. Simplifica la expresión $\frac{(-2)^3 \times (-2)^4}{(-2)^6}$.





PROBLEMAS PARA REPASAR

Un aspecto que se debe controlar cuando una nave espacial sale del planeta, es la temperatura que alcanza la superficie externa durante su paso a través de la atmósfera. La temperatura de la superficie de una nave espacial al entrar en la atmósfera varía entre -200°C a 2.300°C de manera constante.

En un momento determinado, el controlador de la temperatura de la superficie de la nave marca -42°C . ¿Cuántos grados ha subido la temperatura desde el ingreso de la nave a la atmósfera?

Si se ha calculado que en cada minuto la temperatura se eleva 250°C , ¿cuántos minutos deben pasar para que la nave alcance la máxima temperatura, desde que ingresa a la atmósfera?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántos grados ha subido la temperatura desde el ingreso de la nave a la atmósfera cuando el controlador de temperatura marca -42°C ?

¿Cuántos minutos deben pasar para que la nave alcance la máxima temperatura desde que ingresa a la atmósfera?

¿Cuáles son los datos del problema?

La temperatura de la nave varía de -200°C a 2.300°C al entrar en la atmósfera. Esta temperatura cambia de manera constante.

La temperatura aumenta 250°C cada minuto.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

La temperatura inicial es de -200°C y aumenta de manera constante. Como la temperatura marcada por el controlador es de -42°C , se puede determinar el cambio de temperatura realizando la siguiente resta:

$$\begin{aligned}-42 - (-200) &= -42 + 200 \\ &= 158^{\circ}\text{C}.\end{aligned}$$

Por tanto, la temperatura subió 158°C .

Ahora, como la temperatura aumenta 250°C cada minuto, temperatura inicial es -200°C y la temperatura final es 2.300°C , entonces, se determina la variación de la temperatura así:

$$\begin{aligned}2.300 - (-200) &= 2.300 + 200 \\ &= 2.500\end{aligned}$$

Luego, se divide entre 250 para calcular el tiempo en que alcanza la temperatura máxima, así:

$$2.500 \div 250 = 10$$

Por tanto, la nave tarda 10 minutos en alcanzar la máxima temperatura.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Una vez se ha verificado que las operaciones están correctamente realizadas, se puede concluir que la temperatura ha subido 158°C , cuando el controlador marca -42°C , y que la temperatura alcanza su punto máximo pasados 10 minutos.

Resuelve las preguntas 422 a 424 con base en la siguiente información.

Un frigorífico tiene una temperatura de 30° bajo cero, debido a un corte de luz, la temperatura subió 35°C , pero gracias a una rápida solución al corte, volvió a bajar una temperatura de 17°C .

422. ¿Cuál es la temperatura después del corte de luz?

423. ¿Cuál es la temperatura después de solucionado el corte de luz?

424. ¿Cuántos grados varía la temperatura final respecto de la inicial?

Resuelve las preguntas 425 y 426 con base en la siguiente información.

Carlos parte de un punto *A* y se desplaza hacia la derecha 23 km. Luego, 17 km hacia el norte, después 18 km hacia la izquierda y por último 11 km hacia el sur y así llega a la ciudad *B*.

425. Representa en tu cuaderno, el desplazamiento hecho por Carlos en un plano cartesiano.

426. Indica las coordenadas del punto *B* si se asume que el punto *A* está en el origen.

Resuelve las preguntas 427 y 428 con base en la siguiente información.

El género de pingüinos *Spheniscus* está compuesto por cuatro especies: *S. humboldti* (pingüino de Humboldt), *S. magellanicus* (pingüino de Magallanes), *S. mendiculus* (pingüino de Galápagos) y *S. demersus* (pingüino africano). Todos ellos viven en el hemisferio sur, excepto el de Galápagos, que vive más allá de la línea ecuatorial, en el hemisferio norte. Observa el cuadro con las temperaturas máximas y mínimas de los ambientes en los cuales viven estos pingüinos.

Pingüino	Temperatura máxima (en $^{\circ}\text{Celsius}$)	Temperatura mínima (en $^{\circ}\text{Celsius}$)
<i>S. humboldti</i>	18	12
<i>S. magellanicus</i>	15	3
<i>S. demersus</i>	42	16
<i>S. mendiculus</i>	28	14

427. ¿Qué especie soporta mayores cambios de temperatura?

428. Ordena los pingüinos en forma ascendente según la temperatura promedio de sus hábitats.

Resuelve las preguntas 429 a 431 con base en la siguiente información.

La estructura de una mina subterránea de carbón está formada por galerías horizontales. La distancia vertical entre cada dos galerías es de 10 m, si está, por ejemplo, la galería 2 situada a 20 m de profundidad.



429. Carlos se halla en la galería 3, sube 20 m y, después, baja 80 m. ¿En qué galería está ahora?

430. Tras subir 30 m, Marta está en la galería 7. ¿En qué galería estaba antes?

431. Si tanto Carlos como María están luego a 50 m de profundidad, ¿en qué galería se encuentran?

Resuelve las preguntas 432 y 433 con base en la siguiente información.

Los siguientes son los resultados de algunos exámenes de admisión de 20 preguntas en una universidad cuyo sistema de calificación establece que por cada respuesta mala se anula una buena.

Óscar 16 buenas	Ana 9 malas	Clara 7 buenas
Paco 13 malas	Tito 11 buenas	Sandra 12 malas

432. Si solo son admitidos los aspirantes con un puntaje superior a 5, ¿quién logró ingresar?

433. ¿Quién obtuvo el mejor resultado? ¿Y quién el peor?



...Para expresar la profundidad de las fosas marinas.

Las fosas marinas son fallas geológicas producidas en las profundidades del mar formando orificios de gran profundidad. Se forman en zonas de subducción, es decir, en donde se encuentran dos placas tectónicas, de las cuales, la placa de mayor densidad se mueve debajo de la otra y genera el movimiento de sedimentos marinos hacia el fondo de la fosa.



La temperatura de las fosas suele ser muy baja, entre 0° y 2 °C, y genera una gran actividad sísmica gracias al movimiento de las placas. De allí, algunos terremotos y tsunamis se han generado.

Como su longitud se mide hacia la profundidad del mar, es necesario representarlas, por medio de números enteros negativos.

1. Representa la profundidad de las fosas marinas que se encuentra representada en la tabla con números enteros negativos.
2. La tabla muestra los relieves más altos de Colombia.

Relieve	Altura en metros
Sierra Nevada de Santa Marta	5.775
Nevado del Huila	5.750
Nevado del Ruiz	5.400

Por ejemplo, la mayor fosa marina que se conoce es la fosa Challenger, que se encuentra en el Pacífico, en las islas Marianas y tiene una profundidad de 11.034 metros. Este valor se representa mediante una cantidad negativa -11.034 m.

En la siguiente tabla se encuentran las fosas marinas más profundas del mundo.

Fosa marina	Localización	Profundidad en metros
Fosa Challenger o de las Marianas	Pacífico, islas Marianas	11.034
Fosa de Tonga	Pacífico, Nueva Zelanda	10.822
Fosa de Japón	Pacífico, Japón	10.554
Fosa de las Kuriles	Pacífico, islas Kuriles	10.542
Fosa de Filipinas	Pacífico, Filipinas	10.540
Fosa de Kermadec	Pacífico, Nueva Zelanda	10.047
Fosa de Bougainville	Pacífico, Nueva Guinea	9.140
Fosa de Puerto Rico	Atlántico, Puerto Rico	8.800
Fosas de las Sandwich del Sur	Atlántico, islas Sandwich	8.428
Fosa de Atacama	Pacífico, de Perú y Chile	8.065
Fosa de las Aleutianas	Pacífico, islas Aleutianas	7.822
Fosa de las Caimán	Mar caribe	7.680

¿Cuál es la diferencia entre cada uno de los relieves más altos de Colombia y las fosas más profundas del mundo?

3. En lugares donde hay gran profundidad del mar se encuentra una diferencia notable de temperatura que permite aprovechar la energía océano-térmica. Consultar en qué consiste esta energía y en qué lugares se aprovecha.

...También sirve para hallar la emisión de calor de un cuerpo.

Un cuerpo negro es aquel objeto ideal que tiene la capacidad de emitir y absorber radiación solar en forma de calor.

Normalmente cuando un cuerpo está expuesto a la radiación del Sol incrementa su temperatura de diferente forma, dependiendo de sus propiedades físicas. Por ejemplo, si un vehículo se ubica a la intemperie, entonces se incrementa su temperatura y, por tanto, es capaz de emitir radiación; por tal motivo cuando una persona se acerca al vehículo siente el calor que este emite.



Stefan-Boltzmann estableció la emisión de energía de un cuerpo negro, expresado en vatios sobre metro cuadrado. Esta emisión depende de la cuarta potencia de la temperatura medida en kelvin así:

$$\text{Emisión de energía} = \alpha \cdot T^4$$

Donde α es un valor constante propuesta por el físico austriaco Ludwig Boltzmann para relacionar la energía emitida y la temperatura T .

Por ejemplo, para encontrar la expresión de la emisión de energía de un cuerpo que se encuentra a -50°C se convierte primero la temperatura a grados Kelvin mediante la expresión: $K = C + 273$.

$$K = -50 + 273 = 223$$

Ahora, el valor encontrado se eleva a la cuarta potencia.

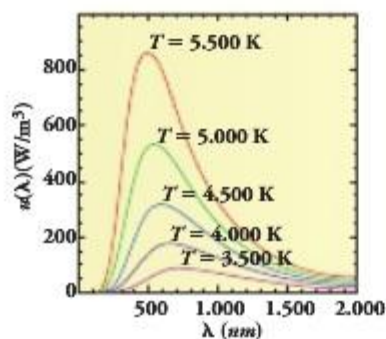
$$T^4 = 223^4 = 2.472.973.441$$

Por último, se reemplaza el valor encontrado en la expresión de energía emitida.

$$\text{Energía emitida} = \alpha \cdot 2.472.973.441$$

Así se obtiene la expresión de la energía emitida por un cuerpo gracias a la radiación solar en términos de la constante de Stefan-Boltzmann.

1. ¿Por qué crees que los objetos emiten calor cuando incide sobre ellos radiación solar?
2. La siguiente gráfica representa la energía emitida por el cuerpo negro.



3. Encuentra la expresión de energía producida para la menor temperatura representada.
 - a. -273°C
 - b. -225°C
 - c. 0°C
 - d. 100°C
 - e. 800°C
4. Gracias a esta expresión, se logró medir la temperatura del Sol y las estrellas con una gran precisión. Consulta cómo lo hicieron y explícalo a tus compañeros de clase.

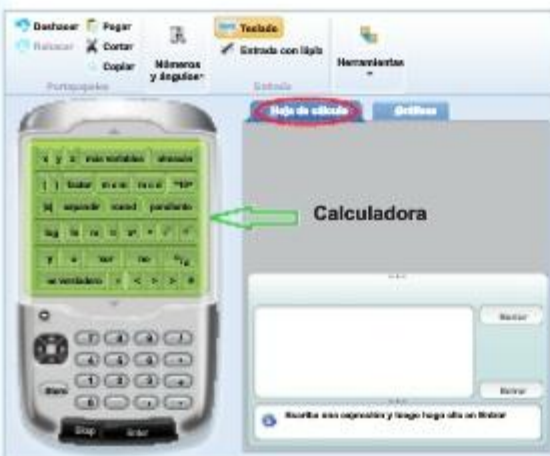
Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: resolver polinomios aritméticos y encontrar la solución de ecuaciones en el conjunto de los números enteros.

Descripción: resolver un polinomio aritmético sin signos de agrupación y resolver un polinomio aritmético que involucre signos de agrupación. Además, encontrar la solución a ecuaciones del tipo $x \pm a = b$ y $ax = c$, con el programa a Microsoft Mathematics.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

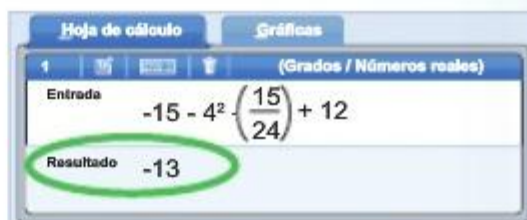
- 1 Haz clic en **Microsoft Mathematics**.
- 2 Observa la ventana que se despliega. Luego, identifica la calculadora y la hoja de cálculo.



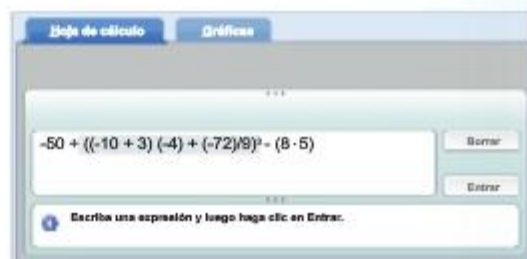
- 3 Para resolver polinomios aritméticos, se escriben las expresiones en la **Hoja de cálculo**. Por ejemplo, para $-15 - 4^2 \cdot 15 \div 24 + 12$, se escriben las potencias y, en general, las operaciones con la ayuda de la calculadora, como se muestra en la figura.



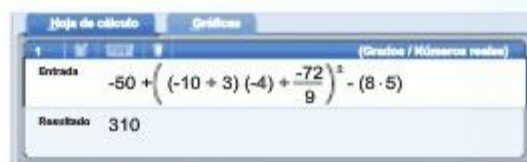
- 4 Para visualizar la solución, haz clic en **Entrar**. Luego, observa el **Resultado** en la **Hoja de cálculo**, como se muestra en la figura.



- 5 Para resolver la siguiente operación:
 $-50 + [(-10 + 3) \cdot (-4) + (-72) \div 9]^2 - (8 \cdot 5)$
 Se escribe la operación en la **Hoja de cálculo**, como se muestra en la figura.



- 6 Para obtener el resultado, haz clic en **Entrar**.



- 7 Resuelve los siguientes polinomios con Microsoft Mathematics.

a. $(90 \div 6) \times [-5 + (\sqrt{625} \div (-5))]$

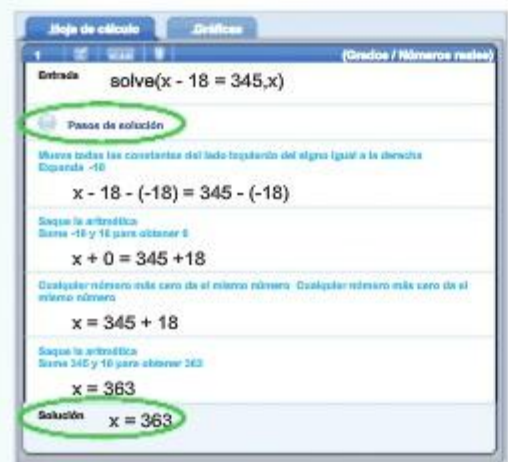
b. $\left[\frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt[3]{64}}{2} - 7 \right]^3 + 8^3 \div 2^4$

c. $\sqrt[3]{4^2 + 8^2} \cdot 2^2$

- 8 Para resolver ecuaciones, estas se escriben en la **Hoja de cálculo**. Por ejemplo, la ecuación $x - 18 = 345$.



- 9 Para visualizar la solución y los pasos para encontrarla, haz clic en **Entrar**.



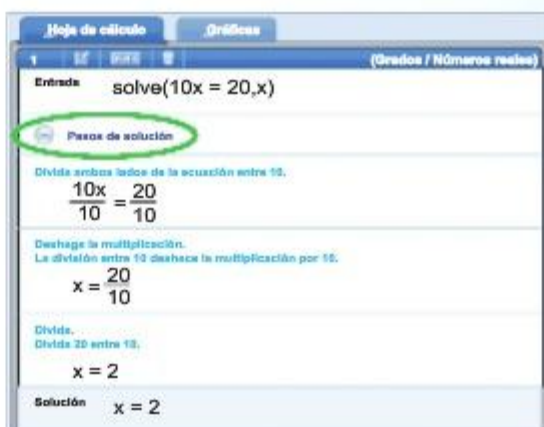
- 10 Escribe la ecuación $10x = 20$. Luego, haz clic en **Entrar** para hallar su respectiva solución.



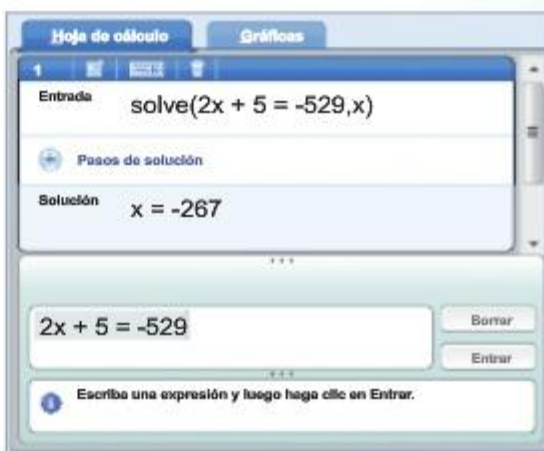
- 11 Visualiza la solución en la ventana que se despliega.



- 12 Identifica los pasos para la solución de la anterior ecuación $10x = 20$. Haz clic en el símbolo — ubicado en la parte superior derecha para ver el paso a paso de la solución.



- 13 Resuelve la ecuación $2x + 5 = -529$, escribiendo la ecuación, visualizando la solución y los respectivos pasos como se muestra en la figura.



- 14 Aplica Microsoft Mathematics para encontrar la solución de las siguientes ecuaciones.

- $2x = -16$
- $\frac{x}{3} = 21$
- $-35 - 4n = -7$
- $-48 = -6x + 12$
- $5x + 8 = -12$

2

Números racionales

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Representar números racionales en la recta numérica.
- Convertir números racionales de fracción a decimal y viceversa.
- Efectuar operaciones entre números racionales expresados como fracciones o como números decimales.
- Resolver problemas de ecuaciones con números racionales.

Encuentra en tu Libromedia

✓ Evaluaciones:

✓ De desempeño

- | | |
|--|---|
|  6 Multimedia |  1 Audio |
|  1 Galería |  10 Imprimibles |
|  7 Actividades |  3 Enlaces web |

Lo que sabes...

1. Escribe la fracción que se representa en cada caso.

a.



b.



2. Simplifica por 3 las siguientes fracciones.

a. $\frac{2}{3}$

b. $\frac{5}{4}$

c. $\frac{9}{8}$

3. Simplifica las siguientes fracciones.

a. $\frac{3}{27}$

b. $\frac{15}{60}$

c. $\frac{11}{121}$

4. Encuentra el valor de x para que cada una de las siguientes igualdades sea verdadera.

a. $x - 11 = 15$

b. $3x - 6 = 18$

5. Efectúa las siguientes operaciones.

a. $\frac{5}{7} + \frac{1}{7}$

b. $\frac{4}{9} - \frac{2}{9}$



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para representar la radiación absorbida por un cuerpo.

La radiación es energía que se propaga por el medio gracias a ondas electromagnéticas que no son visibles para el ser humano. A diario estamos expuestos a la radiación de los diferentes aparatos eléctricos que utilizamos.

La unidad de medida de la absorción de radiación por un cuerpo es el *sievert*, en honor al físico Rolf Sievert, gracias a su contribución en los efectos biológicos producidos por la radiación ionizante.

■ Lee más acerca de este tema en la página 106.

Cronología de números racionales

Egipto. Los egipcios utilizaron fracciones unitarias, es decir, fracciones con numerador igual a 1, para resolver problemas.

India. Brahmagupta planteó reglas básicas para realizar operaciones con números fraccionarios.



Irán. Al Kashi escribió su libro *La llave de la aritmética* donde explicó la forma de escribir números decimales como fracciones.



Europa. Se utilizó por primera vez la palabra fracción que proviene del latín *fractio* que significa parte de un todo.

Bélgica. Se publicó *La aritmética de Simón Stevin, de Brujas* un tratado de fracciones decimales en el que también se incluye una nueva notación de números decimales.

Francia. François Viète en su obra *Canon mathematicus seu ad triangula* utilizó la coma para representar decimales como múltiplos y submúltiplos de 10.



Escocia. John Napier usó la coma para separar la parte entera de la parte decimal como se utiliza en la actualidad.

1650 a. C.

628 d. C.

1150 d. C.

1427 d. C.

1571 d. C.

1585 d. C.

1617 d. C.



Historia de las matemáticas

Las fracciones egipcias



En el antiguo Egipto se realizaban cálculos utilizando solo fracciones con numerador uno y denominador un entero positivo, es decir, un medio, un tercio, un cuarto etc. Las sumas de estas fracciones se denominan fracciones egipcias. Para escribir una fracción, los egipcios utilizaban el símbolo $\circ$ para separar el numerador del denominador.

1. El conjunto $\mathbb{Q}$



Ampliación multimedia

Los números racionales se aplican en diversas situaciones para representar la relación entre dos cantidades o magnitudes. Así, en física se utilizan números racionales para expresar la relación entre la distancia recorrida por un automóvil en un tiempo determinado. Además, los números racionales se aplican en economía para indicar porcentajes, en química para medir la concentración de una sustancia en un cuerpo, y en general, en cualquier área en la que se deba expresar una medida.

1.1 Definición del conjunto $\mathbb{Q}$

El conjunto de números racionales se simboliza con la letra $\mathbb{Q}$ y se define como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Por ejemplo, las fracciones $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{9}$ son números racionales. De la misma forma, todo número entero es un número racional porque se puede escribir como una fracción.

Así, el número 2 se puede escribir como $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots$

EJEMPLOS

1. Escribir un número racional para cada situación.

- a. Un pastel se divide en 8 partes iguales, ¿qué fracción del pastel representa una de las partes?

El número racional $\frac{1}{8}$ representa una parte del pastel, ya que el numerador indica una parte y el denominador el número total de partes.

- b. Un automóvil recorre 119 km en 2 horas, ¿cuál es su velocidad?

El número racional que representa la velocidad del automóvil es $\frac{119}{2}$ km/h, que corresponde al cociente entre la distancia y el tiempo.

2. Sofía tiene una colección de 86 estampillas de las cuales 7 son de Italia.

- a. ¿Qué fracción de las estampillas son de Italia?

En este caso, el denominador es la cantidad total de estampillas y el numerador la cantidad de estampillas de Italia. Por esto la fracción es $\frac{7}{86}$.

- b. Si Sofía compra otras 86 estampillas, entonces el número de estampillas de Italia se triplica. Teniendo en cuenta esto, ¿cuál es la fracción que corresponde al número de estampillas que no son de Italia?



Primero, se tiene que el número total de estampillas es 172.

Luego, como se triplica el número de estampillas de Italia, entonces hay 21 estampillas de este país, lo que implica que de otros hay $172 - 21 = 151$ estampillas.

Finalmente, la fracción que representa la cantidad de estampillas de otros países es $\frac{151}{172}$.



1.2 Fracciones equivalentes



Actividad

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma parte de una unidad. Por ejemplo, las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes, como se muestra en la siguiente figura.



$$\frac{2}{3}$$



$$\frac{8}{12}$$

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones equivalentes, entonces se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $b, d \neq 0$, y se cumple que $a \times d = b \times c$.

Así, como las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son equivalentes, entonces se tiene que $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ porque $2 \times 12 = 3 \times 8 = 24$.

Para encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada se utiliza la simplificación y la complicación.

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción se dividen tanto el numerador como el denominador entre su máximo común divisor (mcd), con lo cual se obtiene una fracción equivalente.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{18}{24}$ se tiene que $\text{mcd}(18, 24) = 6$, con lo cual la simplificación de la fracción es:

$$\frac{18}{24} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6} = \frac{3}{4}, \text{ de donde, } \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

Como la fracción $\frac{3}{4}$ no se puede simplificar más, entonces se dice que es una fracción irreducible.

Una fracción es **irreducible** cuando no hay divisores comunes entre el numerador y el denominador, es decir, cuando el mcd entre el numerador y el denominador es igual a 1.

Complicación de fracciones

Para complicar una fracción se multiplica tanto el numerador como el denominador por el mismo número, con lo cual se obtienen fracciones equivalentes.

Por ejemplo, la complicación de la fracción $\frac{4}{5}$ por 3, se realiza así:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}, \text{ de donde, } \frac{4}{5} = \frac{12}{15}$$

A partir de la simplificación y complicación de fracciones es posible construir un conjunto de fracciones equivalentes a una fracción dada.

Por ejemplo, el conjunto formado por todas las fracciones equivalentes a $\frac{3}{2}$ es:

$$\left\{ \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}, \dots \right\}$$

Como la fracción $\frac{3}{2}$ es irreducible, entonces $\frac{3}{2}$ es el número **racional representante** del conjunto.

Recuerda que...

Siempre que se simplifica una fracción por el mcd del numerador y el denominador se obtiene una fracción irreducible.



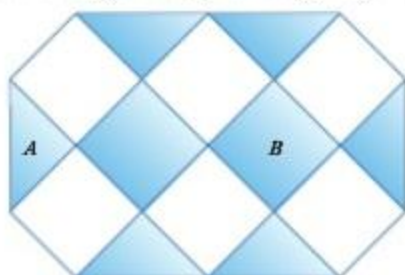
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

1 Escribe el número racional que representa cada situación.

1. La fracción que representa el número de caballos negros, con respecto a la cantidad total de fichas del ajedrez.
2. La fracción que representa los números pares en un dado.
3. La fracción que representa el número de días del mes de diciembre con respecto al número de días de un año bisiesto.

1 Observa la siguiente figura. Luego, responde.



4. ¿Qué número racional representa la parte de color azul?
5. ¿Qué fracción de toda la figura corresponde a la región A?
6. ¿Qué fracción de toda la figura corresponde a la región B?

1 Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

7. El conjunto $\left\{\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots\right\}$ es un conjunto de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$.
8. El número racional representante del conjunto de fracciones equivalentes $\left\{-\frac{3}{9}, -\frac{4}{12}, -\frac{5}{15}, \dots\right\}$ es $-\frac{2}{3}$.
9. La fracción $\frac{13}{169}$ es irreducible.
10. Las fracciones $\frac{15}{21}$ y $\frac{10}{14}$ son equivalentes.

2 Escribe dos fracciones equivalentes a cada fracción dada.

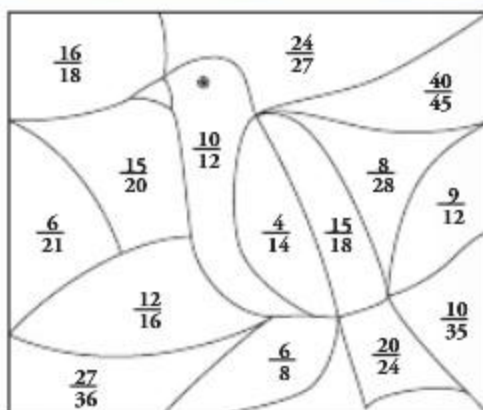
11. $\frac{1}{5}$
12. $-\frac{3}{2}$
13. $\frac{12}{60}$

E 14. Colorea las fracciones equivalentes a las fracciones dadas según la clave.

Clave

Equivalente a:

$\frac{5}{6}$ de rojo. $\frac{8}{9}$ de azul. $\frac{3}{4}$ de verde. $\frac{2}{7}$ de naranja.



R Halla el valor de x en cada simplificación.

15. $\frac{40}{32} = \frac{5}{x}$

17. $\frac{12}{1.728} = \frac{x}{144}$

16. $\frac{180}{450} = \frac{x}{5}$

18. $\frac{13}{x} = \frac{1}{13}$

R Resuelve.

19. Al simplificar una fracción se obtienen $\frac{2}{3}$. Si antes de simplificarla la suma de sus términos era 30, ¿cuál era la fracción?

20. Halla fracciones equivalentes a $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ que tengan el mismo denominador.

S La siguiente tabla muestra la fracción del número de vehículos vendidos en un concesionario.

Vehículo	Cantidad
Motocicleta	$\frac{25}{100}$
Carro	$\frac{3}{10}$
Camioneta	$\frac{1}{5}$
Camión	$\frac{1}{4}$



21. ¿De qué vehículos se vendió la misma cantidad?



1.3 Clasificación de racionales

Los números racionales se pueden clasificar en:

- **Racionales positivos:** cuando el numerador y el denominador tienen el mismo signo. Por ejemplo, el número $\frac{5}{6}$ es positivo.
- **Racionales negativos:** cuando el numerador y el denominador tienen signos diferentes. Por ejemplo, el número $\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$ es negativo.
- **Racionales nulos:** cuando el numerador es igual a cero. Por ejemplo, el número $\frac{0}{8} = 0$ es nulo.
- **Racionales enteros:** cuando el denominador es igual a 1, o cuando el numerador es múltiplo del denominador. Por ejemplo, $\frac{-10}{1} = -10$ y $\frac{12}{4} = 3$ son enteros.

1.4 Números mixtos

Un **número mixto** es un racional que se expresa como la suma de un entero y una fracción. Por ejemplo, el número mixto $3\frac{1}{2}$ representa al número racional $\frac{7}{2}$.

Conversión de fracción a número mixto

Para convertir una fracción impropia a número mixto se realizan los siguientes pasos:

Primero, se divide el numerador entre el denominador.

Luego, se toma el cociente de la división como la parte entera del número mixto.

Finalmente, se escribe la parte fraccionaria teniendo en cuenta que el numerador es el residuo de la división y el denominador es el divisor.

Conversión de número mixto a fracción

Para convertir de número mixto a fracción impropia se realizan los siguientes pasos:

Primero, se multiplica la parte entera por el denominador de la fracción.

Luego, se suma el producto anterior al numerador.

Finalmente, se deja el mismo denominador.

Por tanto, si $a, b, c \in \mathbb{N}$ y $c \neq 0$, entonces se tiene que:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a \times c + b}{c}$$

EJEMPLO

Un motociclista maneja con una velocidad constante de $60\frac{9}{13}$ kilómetros por hora. Suponiendo que pudiera manejar durante 13 horas continuas, ¿cuántos kilómetros recorrería?

Una forma de resolver el problema es convertir el número mixto a fracción. Por tanto, se tiene que:

$$60\frac{9}{13} = 60 + \frac{9}{13} = \frac{60 \times 13 + 9}{13} = \frac{789}{13}$$

Como la velocidad v es igual a $v = \frac{d}{t} = \frac{789}{13}$, donde d es la distancia y t es el tiempo, entonces, se concluye que el motociclista recorrería 789 kilómetros en 13 horas.

Recuerda que...

Una fracción es impropia cuando el numerador es mayor que el denominador.

Matemáticamente

¿Cuál es el número mixto que representa la fracción

$$\frac{19}{5}?$$



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

- I** Representa por medio de un número mixto, si es posible, la parte sombreada en cada gráfica.

22.



23.



24.



- E** Relaciona cada número mixto con la fracción impropia que le corresponde.

25. $7\frac{1}{5}$

a. $\frac{14}{5}$

26. $5\frac{2}{5}$

b. $\frac{18}{5}$

27. $3\frac{3}{5}$

c. $\frac{21}{5}$

28. $2\frac{4}{5}$

d. $\frac{36}{5}$

29. $4\frac{1}{5}$

e. $\frac{27}{5}$

- E** Convierte las siguientes fracciones impropias a número mixto.

30. $\frac{12}{5}$

32. $\frac{21}{4}$

34. $\frac{45}{7}$

31. $\frac{62}{3}$

33. $\frac{73}{9}$

35. $\frac{102}{13}$

- R** Completa cada fila con fracciones equivalentes a las dadas.

36.

		$-\frac{12}{5}$		
--	--	-----------------	--	--

37.

$2\frac{3}{4}$				
----------------	--	--	--	--

38.

			$-1\frac{3}{10}$	
--	--	--	------------------	--

- I** Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

39. El número racional $-\frac{5}{3}$ es negativo.

40. El número racional $\frac{0}{23}$ es nulo.

41. Si b es divisible entre a , entonces $\frac{b}{a}$ es un racional entero.

42. Si $c\frac{a}{b}$ es un número mixto, entonces el numerador de la fracción impropia correspondiente es $(a \times c) + b$.

- E** Encuentra dos fracciones que cumplan las condiciones dadas.

43. Es un número racional positivo cuyo numerador y denominador son múltiplos de 5, y cuya suma es igual a 45.

44. Es un número racional negativo irreducible, cuya diferencia entre el numerador y el denominador es igual a 6.

- M** Escribe el número mixto que corresponde a cada situación.

45. La distancia entre dos pueblos es de $\frac{45}{2}$ kilómetros.

46. El área de una casa es de $\frac{124}{3}$ metros cuadrados.

47. La velocidad de un automóvil es de $\frac{285}{4}$ km por hora.

- S** Resuelve.

48. La capacidad de una memoria USB es de $\frac{49}{8}$ GB. ¿Cuántas GB enteras contiene la memoria USB?

49. Para pintar una casa se requieren $\frac{19}{3}$ galones de pintura. ¿Cuántos galones completos se deben comprar?

50. Los carábidos son una familia de escarabajos que incluyen cerca de 30.000 especies y se caracterizan por sus coloraciones de brillo metálico. Si uno de estos escarabajos mide $59\frac{1}{3}$ mm, ¿cuál es la fracción que representa su longitud?





1.5 Representación decimal de un número racional



Actividad

Una **fracción decimal** es aquella cuyo denominador es una potencia de 10.

Las fracciones decimales se leen según la potencia de 10 que corresponde a su denominador. Por ejemplo, las fracciones $\frac{3}{10}$, $\frac{15}{100}$ y $\frac{47}{1.000}$ se leen tres décimos, quince centésimos y cuarenta y siete milésimos respectivamente.

Una fracción decimal se puede representar mediante un número decimal. Los números decimales están formados por una **parte entera**, que se escribe antes de la coma, y por una **parte decimal** que se escribe después de la coma. Para expresar una fracción decimal como un número decimal se escribe el numerador y se separan de derecha a izquierda sus cifras con una coma, según la cantidad de ceros que tenga el denominador.

Por ejemplo,

$$\frac{4}{10} = 0,4$$

$$\frac{2.538}{100} = 25,38$$

$$\frac{841.912}{1.000} = 841,912$$

Cada cifra de un número decimal tiene un valor determinado según su posición. Así, la tabla de posición de los anteriores números decimales es:

Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades	Coma	Décimas	Centésimas	Milésimas
UM	C	D	U	,	d	c	m
			0	,	4		
		2	5	,	3	8	
	8	4	1	,	9	1	2

EJEMPLO

Una orca puede llegar a pesar cerca de $\frac{5.500}{1.000}$ t (toneladas) si es macho, o $\frac{411}{100}$ t si es hembra. Además, la longitud del macho puede ser hasta de $\frac{89}{10}$ m y la hembra puede alcanzar los $\frac{77.000}{10.000}$ m. Expresar las medidas de la orca con números decimales.

Primero, se expresan con números decimales los pesos de una orca, según si es macho o hembra. Para esto, se escribe el numerador de cada fracción y se ubica la coma de derecha a izquierda según la cantidad de ceros del denominador.

$$\frac{5.500}{1.000} = 5,5 \text{ y } \frac{411}{100} = 4,11$$

Luego, se convierten de la misma forma las longitudes a números decimales.

$$\frac{89}{10} = 8,9 \text{ y } \frac{77.000}{10.000} = 7,7$$

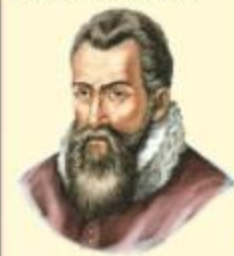
Finalmente, se tiene que si una orca es macho, puede llegar a tener 5,5 t de peso y 8,9 m de longitud, y si es hembra su peso es 4,11 t y su longitud 7,7 m.



Historia de las matemáticas

Fracciones y números decimales

El ingeniero y matemático holandés Simón Stevin (1548-1620), desarrolló un método para hacer operaciones entre fracciones decimales sin usar los denominadores. Aunque el método de Stevin no se utilizó mucho, sirvió para que el matemático escocés John Napier (1550-1617), representara las fracciones decimales como números decimales, introduciendo el uso de la coma como se conoce actualmente.



Recurso imprimible



1.6 Clasificación de los números racionales decimales

Los números decimales se clasifican en números decimales exactos y números decimales periódicos, los cuales a su vez pueden ser periódicos puros o periódicos mixtos.

Decimal exacto	Decimal periódico puro	Decimal periódico mixto
Es aquel que tiene una cantidad finita de cifras decimales. Se obtiene de fracciones decimales o de fracciones irreducibles cuyos denominadores tienen como factores primos solamente a 2 o 5.	Es aquel número cuya parte decimal se repite infinitas veces. Se obtiene de fracciones irreducibles con denominadores que no tienen como factores primos a 2 o a 5. La parte decimal se denomina período e inicia inmediatamente después de la coma.	Es aquel cuyo período no empieza inmediatamente después de la coma. Se obtiene de fracciones irreducibles cuyos denominadores tienen, además de 2 o de 5, otros factores primos.

Para convertir una fracción a número decimal se divide el numerador entre el denominador.

EJEMPLOS

Recuerda que...

Para indicar el período en un número decimal, se escribe una línea en la parte superior de las cifras decimales que se repiten indefinidamente. Así, el número $1,35555\ldots$ se escribe $1,3\overline{5}$.

Matemáticamente

¿Qué tipo de número decimal es un número entero?

El deshielo de los glaciares de Alaska ha provocado que el nivel del mar aumente en

$\frac{7}{50}$ milímetros anualmente.

a. Determinar qué tipo de número decimal representa el aumento del nivel del mar.

Primero, se descompone en factores primos el denominador de la fracción $\frac{7}{50}$ con lo cual se obtiene que $50 = 2 \times 5^2$.

Luego, se tiene que los únicos factores primos que resultan en la descomposición del denominador son 2 y 5.

Finalmente, se concluye que el número decimal que representa el aumento en el nivel del mar es exacto.

b. ¿Qué número decimal representa el aumento del nivel del mar por el deshielo de los glaciares de Alaska?

Se convierte la fracción $\frac{7}{50}$ a número decimal, dividiendo el numerador entre el denominador. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escribe un cero en el cociente porque 7 es menor que 50.

Luego, se agrega un cero al dividendo y una coma al cociente.

Finalmente, se divide 70 entre 50.

Por tanto, el nivel del mar aumenta 0,14 milímetros anualmente, por el deshielo de los glaciares de Alaska.



$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 50} \\ 200 \overline{) 0,14} \\ 0 \end{array}$$



Afianzo COMPETENCIAS

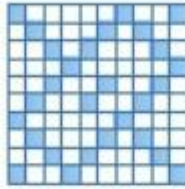
I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

- I** Copia la fracción decimal que representa la parte sombreada en cada figura.

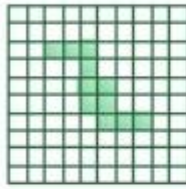
51.



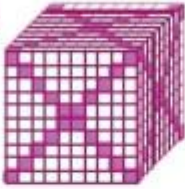
53.



52.



54.



- I** Escribe el número decimal que corresponde.

55. Cinco décimos.

56. Un entero y nueve décimos.

57. Doce centésimos.

58. Ochenta y cuatro milésimos.

- E** 59. Completa la tabla.

Fracción	Fracción decimal	Número decimal
$\frac{7}{5}$		1,4
	$\frac{23}{100}$	
		0,36
$\frac{13}{8}$		

- E** Elabora en tu cuaderno una tabla de posición. Luego, ubica los siguientes números decimales.

60. 0,8 62. 21,204 64. 0,0105

61. 1,04 63. 133,089 65. 87,206

- I** Clasifica el número decimal que representa cada fracción en exacto, periódico puro o periódico mixto. Justifica tu respuesta.

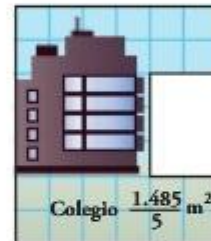
66. $\frac{8}{25}$ 68. $\frac{16}{9}$ 70. $\frac{7}{15}$ 72. $\frac{48}{300}$ 67. $\frac{35}{125}$ 69. $\frac{15}{90}$ 71. $\frac{107}{99}$ 73. $\frac{125}{21}$

- M** Expresa el número decimal que aparece en cada dato sobre la Antártida en forma de fracción decimal.

74. La capa de hielo de la Antártida ha alcanzado un grosor máximo de 4,77 km.

75. En la estación Vostok, en la Antártida, el 21 de julio de 1983 se presentó una temperatura de $-89,2^{\circ}\text{C}$, la más baja registrada en la historia del planeta.

- S** En el siguiente plano de un pueblo se muestra el área de sus principales sitios de interés.



76. Expresa las áreas de cada sitio como fracciones decimales.

77. Determina el número decimal que representa el área de cada sitio.

- S** En la siguiente tabla se muestran las longitudes de algunos de los animales más pequeños que se han encontrado por especie.

Animal	Longitud (cm)
Colibrí abeja	$\frac{127}{5}$
El lémur ratón	$\frac{2.413}{200}$
El caballo de mar <i>Hippocampus denise</i>	$\frac{8}{5}$
Rana Monte Iberia Eleuth	$\frac{17}{20}$



78. Expresa la longitud de cada animal como una fracción decimal y como un número decimal.



Ampliación
multimedia

1.7 Conversión de número decimal a fracción

Para determinar la fracción que representa un número decimal, se debe tener en cuenta si es un número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto.

Conversión de número decimal exacto a racional

La **conversión de un número decimal exacto a fracción** se realiza mediante los siguientes pasos:

Primero, se escribe como numerador todo el número sin considerar la coma decimal.

Luego, se escribe como denominador la potencia de diez que tiene tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

Finalmente, se simplifica la fracción decimal obtenida hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$5,29 = \frac{529}{100}$$

Parte entera y decimal sin coma.

Potencia de diez con tantos ceros como cifras decimales tiene el mismo número.

Conversión de un número decimal periódico puro a racional

Para **convertir un decimal periódico puro a fracción** se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escribe en el numerador todo el número hasta el final del primer período sin considerar la coma, y se resta con la parte entera del número.

Luego, en el denominador se escriben tantos nueves como cifras tiene el período.

Finalmente, se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$5, \overline{16} = \frac{516 - 5}{99} = \frac{511}{99}$$

Diferencia entre el número sin coma y la parte entera.

Tantos 9 como cifras tiene el período.

Conversión de un número decimal periódico mixto a racional

Para **convertir un decimal periódico mixto a fracción** se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escribe en el numerador todo el número hasta el final del primer período sin la coma, y se le resta el número resultante de suprimir las cifras del período.

Luego, se escribe en el denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica.

Finalmente, se simplifica hasta obtener una fracción irreducible.

Por ejemplo,

$$1,3 \overline{12} = \frac{1312 - 13}{990} = \frac{1299}{990}$$

Diferencia entre el número sin la coma y el número resultante de suprimir las cifras del período.

Tantos 9 como cifras tiene el período y tantos 0 como tiene la parte decimal no periódica.

Se simplifica, si es posible.

$$= \frac{433}{330}$$



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

79. Completa la tabla.

Parte entera	Parte decimal	Número decimal	Fracción decimal
5		5,12	
2	777...		
		13,2 $\hat{1}$	
			$\frac{43}{45}$

80. Expresa cada número decimal como una fracción y descubre el nombre de un parque natural de Colombia.

80. 7,2 R

81. 0,35 U

82. 0,1 $\hat{2}$ C

83. 5,4 $\hat{4}$ M

84. 0,1 $\hat{5}$ I

85. 0,20 $\hat{5}$ A

$\frac{49}{9}$	$\frac{203}{990}$	$\frac{4}{33}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{203}{990}$

86. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

86. El número decimal 3,1 representa a la fracción $\frac{3}{10}$.

87. La fracción $\frac{5}{20}$ es igual al número decimal 0,25.

88. Si un decimal periódico puro tiene parte entera 4 y período $\hat{5}$, entonces el número puede ser 4,0 $\hat{5}$.

89. Si el número 6,27 $\hat{2}$ es decimal periódico mixto, entonces la parte decimal no periódica es 2.

90. Escribe un número decimal que cumpla cada condición. Luego, conviértelo a fracción.

90. Es decimal finito y tiene 38 milésimas.

91. Es decimal periódico puro y tiene parte entera 6.

92. Es decimal periódico mixto y su parte decimal no periódica es 13.

93. Los resultados de una prueba académica se obtuvieron dividiendo la cantidad de respuestas correctas entre la cantidad de preguntas que cada estudiante respondió. La siguiente tabla muestra los resultados de tres estudiantes:

Ana	David	Pilar
0,53	0,2	0,1 $\hat{2}$

93. Determina la fracción que representa el resultado de cada estudiante.

94. ¿Cuántas preguntas respondió cada estudiante?

95. ¿Cuántas respuestas correctas obtuvo cada uno?

96. La siguiente tabla muestra el número de días que tardan algunos planetas en darle la vuelta al Sol.

Planeta	Número de días
Mercurio	87,97
Venus	224,7
Tierra	365,256
Marte	686,98



96. Halla la fracción que representa el número de días que tarda cada planeta en darle la vuelta al Sol.

97. En el año 2012 los tres mejores jugadores de tenis, según el ranking de la ATP, fueron Novak Djokovic, Rafael Nadal y Roger Federer. El número decimal que representa la razón entre el número de partidos ganados y el número de partidos jugados por cada tenista, hasta abril de ese año, se muestra en la siguiente tabla.

Novak Djokovic	0,8
Rafael Nadal	0,82
Roger Federer	0,815



97. Determina la razón entre el número de partidos ganados y el número de partidos jugados por cada tenista.

98. Halla la cantidad de partidos ganados por cada tenista sobre un total de 200 partidos jugados.



1.8 Representación de los racionales en la recta numérica



Recurso
imprimible

Los números racionales se pueden ubicar en la recta numérica a partir de su representación como fracción o como número decimal.

- Para representar en la recta numérica un número racional en forma de fracción, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se expresa, si es posible, el número racional como un número mixto.

Segundo, se determinan los números enteros entre los que se encuentra el número racional.

Luego, se divide la unidad que hay entre los dos números enteros, en tantas partes como indica el denominador.

Finalmente, a partir del menor de los dos números enteros, se toman hacia la derecha tantas partes como indica el numerador, si el número es positivo. Si el número es negativo, a partir del entero mayor se toma hacia la izquierda tantas partes como indica el numerador.

- Para representar en la recta numérica un número racional en forma de número decimal, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se aproxima el número decimal para que quede con una sola décima.

Luego, se determinan los números enteros entre los que se encuentra el número decimal.

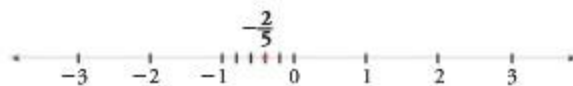
Finalmente, se divide la unidad en la que se encuentra el número decimal en 10 partes iguales y se ubica según sus décimas.

EJEMPLOS

1. Representar cada fracción en la recta numérica.

a. $-\frac{2}{5}$

La fracción se ubica entre 0 y -1 . Por esto, se divide la unidad que hay entre estos dos números en 5 partes iguales, como indica el denominador, y se toman dos a la izquierda del cero. Luego, la representación de la fracción en la recta es:

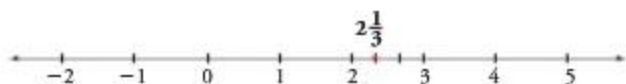


b. $\frac{7}{3}$

Primero, se expresa como número mixto la fracción $\frac{7}{3}$. Para esto, se divide el numerador entre el denominador, con lo cual se obtienen $2\frac{1}{3}$.

Luego, la fracción se ubica entre 2 y 3. Por esto, se divide la unidad que hay entre estos dos números en 3 partes iguales y se toman una parte a la derecha del dos.

Por tanto, la representación de la fracción en la recta es:



Matemáticamente

¿Entre cuáles números enteros se representa una fracción propia en la recta numérica?



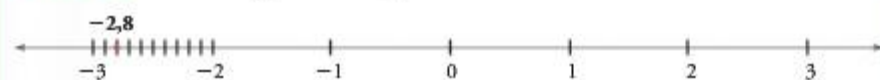
2. Ubicar cada número decimal en la recta numérica.

a. $-2,8$

Primero, se tiene que $-2,8$ está ubicado entre -2 y -3 .

Luego, se divide la unidad entre estos dos números en 10 partes iguales.

Finalmente, se toman 8 partes a la izquierda de -2 , así:



b. $5,38$

Primero, se aproxima $5,38$. Como la cifra de las centésimas es 8, entonces el número se aproxima a $5,4$.

Luego, se tiene que $5,4$ está entre 5 y 6. Por esto, se divide la unidad comprendida entre estos dos números en 10 partes iguales.

Finalmente, se toman cuatro partes a la derecha del 5 así:



3. Completar la fracción o número decimal que corresponde a cada situación a partir de su representación en la recta numérica.

a. Un atleta recorrió solo $\frac{\square}{\square}$ de su trayecto antes de llegar a la meta.



En este caso el trayecto, que corresponde a la unidad entre 0 y 1, está dividido en 12 partes iguales. Así, como el atleta está en la séptima parte a la derecha del 0, entonces la fracción que completa la situación es $\frac{7}{12}$.

b. La isla Tierra Bomba se encuentra aproximadamente a $\square, \square$ kilómetros de Cartagena.



En esta situación la isla está ubicada entre 1 y 2. Como la unidad entre estos dos números decimales está dividida en 10 partes iguales y la isla está en la quinta parte a la derecha del 1, entonces el número decimal que completa el enunciado es $1,5$.



Recuerda que...

Para indicar el período en un número decimal se escribe una línea en la parte superior de las cifras decimales que se repiten indefinidamente. Así, el número $1,35555\dots$ se escribe $1,3\overline{5}$.



Afianzo COMPETENCIAS

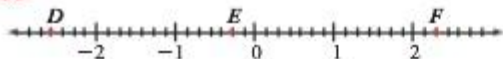
I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

- I** Escribe los números racionales que corresponden a los puntos sobre las rectas numéricas.

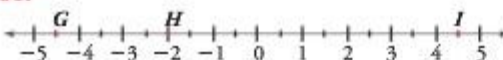
99.



100.



101.



102.



- A** Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tu respuesta.

103. El número $\frac{4}{3}$ está ubicado entre 0 y 1.

104. El número $-\frac{9}{4}$ está ubicado entre -3 y -2.

105. El número $\frac{15}{4}$ está entre los números $\frac{7}{2}$ y 4.

106. Los números $\frac{6}{5}$ y $\frac{7}{4}$ están entre 1 y 2.

- E** Expresa cada número decimal como una fracción irreducible. Luego, ubícalo en la recta numérica.

107. 2,5

110. 3,5

108. 0,25

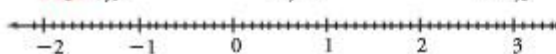
111. 1,5

109. 4,5

112. 1,25

- E** Ubica en cada recta los números decimales dados.

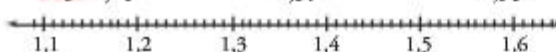
113. 0,5 2,1 -1,3



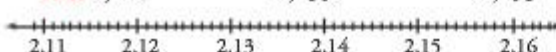
114. -1,7 -0,3 2,4



115. 1,15 1,39 1,53



116. 2,116 2,135 2,153



- M** Lee la siguiente información. Luego, resuelve.

La librería se encuentra a la derecha de la estación del tren a una distancia de 1,5 km.

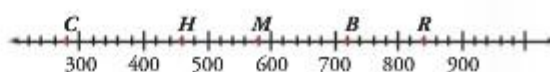
El colegio se encuentra a la izquierda de la estación del tren a 2,8 km de distancia.

El parque se encuentra ubicado a la derecha de la estación del tren a 0,9 km de distancia.

117. Ubica en la recta numérica la librería (L), el parque (P) y el colegio (C), en una recta numérica.

- S** Lee y resuelve.

En una prueba, se registran las distancias recorridas en kilómetros por cinco automóviles de diferentes marcas, Chevrolet (C), Honda (H), Mazda (M), BMW (B) y Renault (R) representadas en la siguiente recta numérica.



118. Elabora una tabla como la siguiente con las distancias de cada automóvil.

Automóvil	Distancia en km
Chevrolet (C)	
Honda (H)	

- S** Observa y responde.

La siguiente gráfica muestra las distancias de tres islas a la costa.



119. Ubica las distancias de las islas en la recta numérica.



120. ¿Qué isla está más alejada de la costa?

121. Organiza, de menor a mayor distancia, las islas teniendo en cuenta la playa.



1.9 Ubicación de puntos en el plano cartesiano: coordenadas con números racionales

Los números racionales sirven para ubicar puntos en el plano cartesiano a partir de parejas ordenadas, cuyas coordenadas se pueden expresar como fracción o como número decimal.

Ubicación de puntos cuyas coordenadas son fracciones

Para ubicar la pareja ordenada $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$, donde $\frac{a}{b}$ es la componente en x o **abscisa** y $\frac{c}{d}$ es la componente en y u **ordenada**, y $b, d \neq 0$, se realiza el siguiente procedimiento:

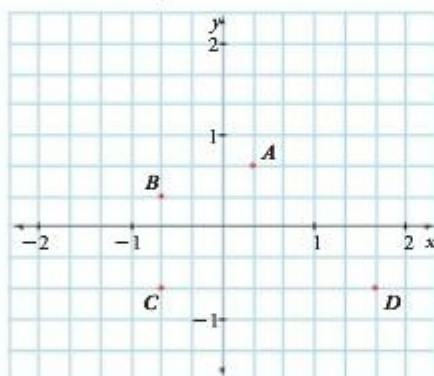
Primero, se ubica a $\frac{a}{b}$ en el eje x y a $\frac{c}{d}$ en el eje y .

Luego, se traza la recta vertical que pasa por $\frac{a}{b}$ y la recta horizontal que pasa por $\frac{c}{d}$.

Finalmente, la intersección de las dos rectas es el punto $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$.

EJEMPLOS

1. Escribir las coordenadas de cada punto.



Como cada unidad, tanto en el eje x como en el eje y están divididas en tres partes iguales, entonces las coordenadas de los puntos son:

$$A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), B\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), C\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ y } D\left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

2. Determinar el cuadrante donde está ubicada cada pareja ordenada.

a. $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right)$

Como la coordenada en x y la coordenada en y son positivas, el punto se encuentra en el primer cuadrante.

b. $\left(\frac{4}{6}, -\frac{1}{3}\right)$

Como la abscisa es positiva y la ordenada es negativa, el punto se encuentra en el cuarto cuadrante.

c. $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{2}{7}\right)$

Como la coordenada en x y la coordenada en y son negativas, el punto se encuentra en el tercer cuadrante.

Recuerda que...

El plano cartesiano está dividido en cuatro cuadrantes como se muestra a continuación.





Ubicación de puntos cuyas coordenadas son números decimales

Para ubicar un punto cuyas coordenadas están en números decimales, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se aproxima cada número decimal a la décima más cercana.

Segundo, se divide cada unidad de ambos ejes en 10 partes iguales.

Luego, se ubica en el eje x la abscisa y en el eje y la ordenada, según la parte entera y la parte decimal de cada coordenada.

Finalmente, se traza una recta vertical que pase por la abscisa y una recta horizontal que pase por la ordenada, y se ubica la pareja ordenada en el punto de intersección de las dos rectas.

EJEMPLOS

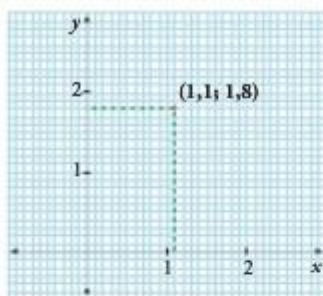
1. Ubicar cada punto en el plano cartesiano.

a. $(1,1; 1,8)$

Primero, se divide cada unidad de ambos ejes del plano cartesiano en 10 partes iguales.

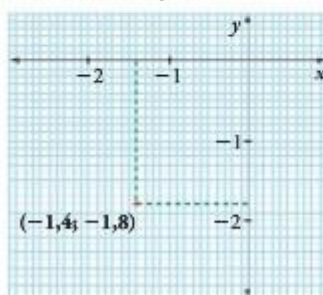
Luego, se ubica 1,1 en el eje x y 1,8 en el eje y .

Finalmente, se traza la recta vertical que pasa por la abscisa y la recta horizontal que pasa por la ordenada, de tal forma que la pareja ordenada $(1,1; 1,8)$ se ubica en el punto de intersección de ambas rectas.

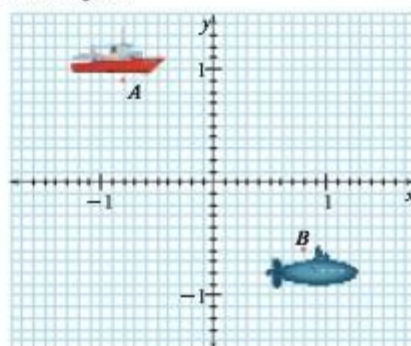


b. $(-1,44; -1,8)$

En este caso se aproxima $-1,44$ a la décima más cercana, es decir, $-1,4$. Luego, se ubica la abscisa en el eje x y la ordenada en el eje y , con lo cual la pareja ordenada se ubica en el tercer cuadrante, así.



2. Suponer que un radar determina las posición A de un barco y la posición B de un submarino, mediante coordenadas en kilómetros, como se muestra en la siguiente figura.



a. Hallar las coordenadas del barco y del submarino.

Primero, se tiene que en ambos ejes cada unidad está dividida en 10 partes iguales, con lo cual cada parte corresponde a una décima.

Luego, la abscisa del punto A es $-0,8$ y su ordenada es $0,9$. Además, la abscisa del punto B es $0,8$ y su ordenada es $-0,6$.

Finalmente, el barco está situado en $A(-0,8; 0,9)$ y el submarino está ubicado en $B(0,8; -0,6)$.

b. Determinar la distancia horizontal y la distancia vertical que separa al submarino del barco.

Para calcular la distancia horizontal se restan las abscisas y para hallar la distancia vertical se restan las ordenadas. Además, se aplica valor absoluto, porque las distancias deben ser positivas. Por tanto se tiene que:

$$\text{Distancia horizontal: } |(0,8) - (-0,8)| = 1,6 \text{ km}$$

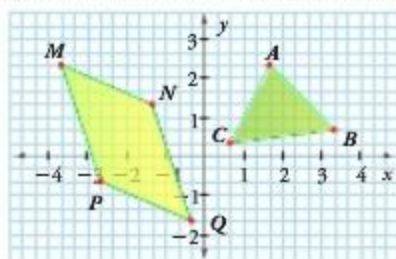
$$\text{Distancia vertical: } |(0,9) - (-0,6)| = 1,5 \text{ km}$$



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

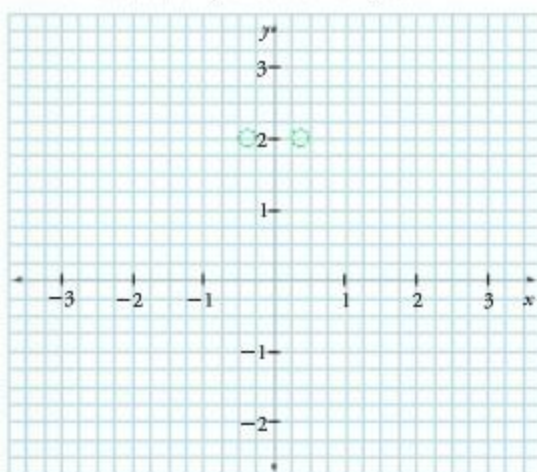
- I** Encuentra las coordenadas cartesianas de los vértices de cada figura representadas en el plano cartesiano.



122. Triángulo ABC

123. Paralelogramo $MNPQ$

- E** 124. Ubica los puntos en el plano cartesiano. Luego, únelos con segmentos siguiendo el orden de las letras desde A y descubre la figura.



- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| A. $(0, 2\frac{1}{2})$ | I. $(1\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ | Q. $(-1, -1\frac{1}{4})$ |
| B. $(\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$ | J. $(1, -1\frac{1}{4})$ | R. $(-1\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ |
| C. $(\frac{3}{4}, 3)$ | K. $(1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2})$ | S. $(-1, 1\frac{3}{4})$ |
| D. $(1, 3\frac{1}{4})$ | L. $(\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ | T. $(-1\frac{1}{4}, 2)$ |
| E. $(1\frac{1}{4}, 3)$ | M. $(\frac{3}{4}, -1\frac{1}{4})$ | U. $(-1, 2\frac{3}{4})$ |
| F. $(1, 2\frac{3}{4})$ | N. $(-\frac{3}{4}, -1\frac{1}{4})$ | V. $(-1\frac{1}{4}, 3)$ |
| G. $(1\frac{1}{4}, 2)$ | O. $(-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$ | W. $(-1, 3\frac{1}{4})$ |
| H. $(1, 1\frac{3}{4})$ | P. $(-1\frac{1}{4}, -1\frac{1}{2})$ | X. $(-\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4})$ |

- I** Determina las coordenadas cartesianas de los puntos que cumplan cada condición dada.

125. Dos puntos A y B que tengan la misma ordenada pero diferente abscisa.
126. Tres puntos A , B y C cuya ordenada sea el mismo racional negativo y cuyas abscisas sean números impares.
127. Tres puntos A , B y C cuya ordenada sean números impares negativos y cuyas abscisas sean fracciones equivalentes.

- P** Dibuja sobre el plano cartesiano el polígono dado. Luego, responde.

128. Dos de los vértices de un triángulo isósceles están ubicados en los puntos $A(\frac{13}{4}, 2, 5)$ y $B(-\frac{13}{4}, 2, 5)$. ¿Cuáles son las coordenadas del tercer vértice?
129. Tres vértices del paralelogramo $ABCD$ son: $A(\frac{9}{2}, -3)$, $B(\frac{9}{2}, -4)$ y $C(-2, 5; 3, 5)$. ¿En qué coordenadas está ubicado el punto D ?
130. Dos vértices del paralelogramo $RSTU$ son los puntos $R(\frac{5}{3}, 2)$ y $S(\frac{14}{6}, -1)$. ¿Cuáles son las coordenadas de los otros dos vértices?

- S** Las alturas que alcanza un objeto que se lanzó desde cierto punto, se registran en la siguiente tabla:



Tiempo (segundos)	0	0,5	0,8	1	1,2
Altura (cm)	4	3,5	2,7	2	1,1

131. Ubica en el plano cartesiano las parejas ordenadas cuya abscisa es el tiempo y cuya ordenada es la altura.



1.10 Orden en los racionales



Recurso
imprimible



Enlace web

Los números racionales se pueden comparar a partir de su representación como fracción y de su representación como número decimal.

Orden de racionales en forma de fracción

Al comparar dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se puede presentar solo una de las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para comparar dos números racionales expresados como fracciones se deben tener en cuenta los siguientes casos:

Caso 1. Si las fracciones tienen el mismo denominador se comparan los numeradores.

Caso 2. Si las fracciones no tienen el mismo denominador, entonces se realizan los siguientes pasos:

Primero, se halla el mcm de los denominadores.

Luego, se simplifica cada fracción para que el denominador común sea el mcm.

Finalmente, se comparan los numeradores.

Matemáticamente

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos números racionales tales que $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ¿en cuál punto de la siguiente recta numérica debe ir la fracción $\frac{a}{b}$?



EJEMPLOS

1. Comparar las fracciones $-\frac{6}{11}$ y $-\frac{5}{11}$.

Como los denominadores son iguales, se comparan los numeradores, entonces se tiene que $-6 < -5$, de donde se deduce que: $-\frac{6}{11} < -\frac{5}{11}$.

2. En una pastelería se elaboran dos tipos de ponqués, el de melocotón que contiene $\frac{3}{5}$ de libra de fruta y el de fresas que contiene $\frac{5}{6}$ de libra de fruta. ¿Qué ponqué contiene menos fruta?



Primero, se tiene que las fracciones que representan las cantidades de fruta de cada pastel tienen diferentes denominadores.

Segundo, se halla el mcm de los denominadores. Como los denominadores son 5 y 6 su mcm es 30.

Luego, se simplifican las fracciones.

$$\frac{3}{5} \times \frac{6}{6} = \frac{18}{30} \text{ y } \frac{5}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{25}{30}$$

Finalmente, se comparan los numeradores. Como $18 < 25$ entonces $\frac{18}{30} < \frac{25}{30}$. Por tanto, se cumple que $\frac{3}{5} < \frac{5}{6}$, de donde se concluye que el ponqué de melocotón contiene menos fruta que el de fresa.



Orden de racionales en forma de número decimal

Al comparar dos números decimales se debe tener en cuenta el valor posicional de cada cifra. Para esto, se aplican las siguientes condiciones:

- Si se compara la parte entera de los números, es mayor el número decimal cuya parte entera es mayor.
- Si la parte entera de los números es igual, se comparan las décimas de cada número, de tal forma que es mayor el número cuya cifra de las décimas es mayor.
- Si la parte entera y las décimas de los números son iguales, se comparan las centésimas y así sucesivamente.

EJEMPLOS

1. Comparar los números decimales 903,105 y 903,12.

Primero, se completa el número 903,12 con un cero para obtener el mismo número de cifras decimales.

Luego, como las partes enteras y las décimas de ambos números son iguales, entonces se comparan las centésimas así:

$$\begin{array}{ccc} 903,105 & & 903,120 \\ & \text{---} < \text{---} & \\ & \text{centésimas} & \end{array}$$

Finalmente, se tiene que $903,12 > 903,105$, porque la cifra de las centésimas de 903,12 es mayor que la cifra de las centésimas de 903,105.

2. El lanzamiento de jabalina es una prueba de atletismo. En la siguiente tabla se muestran algunos de los récords más importantes de este deporte.

Año	Récord en metros
1984	104,80
1995	92,60
1996	98,48
1999	93,09
2000	91,69
2002	92,61
2005	91,53
2006	91,59



Ordenar de mayor a menor los récords de lanzamiento de jabalina que aparecen en la tabla.

Primero, se tiene que $104,80 > 98,48 > 93,09$, porque son los números que tienen la mayor parte entera.

Luego, se cumple que $92,61 > 92,60$, porque aunque sus partes enteras son iguales, el número 92,61 tiene una centésima más que 92,60. Además, al comparar los números cuya parte entera es 91 se tiene que $91,69 > 91,59 > 91,53$.

Finalmente, los números quedan organizados de mayor a menor de la siguiente forma:

$$104,80 > 98,48 > 93,09 > 92,61 > 92,60 > 91,69 > 91,59 > 91,53$$

Matemáticamente

Completa con los signos $<$ y $>$.

$$1,0001 \square 1,001$$

$$2,2 \square 2,15$$



Afianzo COMPETENCIAS

Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

E Compara cada par de fracciones y escribe $<$, $>$ o $=$, según corresponda.

132. $-\frac{12}{11} \square \frac{9}{22}$

135. $\frac{35}{48} \square \frac{23}{24}$

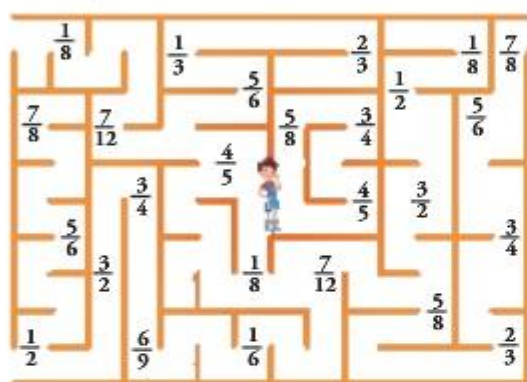
133. $\frac{5}{12} \square \frac{18}{36}$

136. $-\frac{35}{48} \square -\frac{29}{30}$

134. $-\frac{19}{20} \square -\frac{4}{3}$

137. $\frac{85}{72} \square \frac{55}{54}$

R 138. Lee, observa y resuelve. Si el niño debe seguir el camino de fracciones ordenadas de menor a mayor, indica la salida del laberinto.



E Ordena de menor a mayor cada grupo de números decimales.

139. 13,573 13,564 13,529 13,61

140. 0,025 0,03 0,021 0,02

141. -7,86 -7,45 -7,51 -7,6

P Encuentra un número decimal que cumpla cada condición.

142. Está entre $-3,45$ y $-3,46$.

143. Está entre $0,0089$ y $0,009$

S La confección de tres trajes requiere:

Vestido de gala para dama: $\frac{9}{4}$ m de tela.

Vestido ejecutivo para dama: $\frac{13}{3}$ m de tela.

Vestido informal para dama: $\frac{5}{2}$ m de tela.

144. ¿Qué tipo de vestido necesita menos cantidad de tela?

145. ¿Qué tipo de vestido requiere más cantidad de tela?

S Lee y resuelve.

Colombia tiene una gran riqueza hídrica; algunas de sus lagunas más representativas son:

Nombre de la laguna	Área (km ²)
Laguna Mapiripana	5,50
Laguna Cumbal	2,11
Laguna de Fúquene	6,80
Laguna la Paya	2,25



146. Ordena de mayor a menor el área de las lagunas.

S La siguiente tabla muestra algunos circuitos de carreras de automóviles.

Circuito	Longitud	Forma
Atlanta	1,54 millas	
Bristol	0,533 milla	
Chicagoland	1,5 millas	
Darlington	1,366 millas	
Daytona Beach	2,5 millas	

147. Ordena de mayor a menor la longitud de los circuitos.

148. ¿Cuáles son los tres circuitos más largos?



2. Operaciones entre números racionales



Actividad



Enlaces web

En los números racionales también están definidas la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y la radicación.

2.1 Adición de racionales en forma de fracción

Cuando se suman números racionales, expresados como fracciones, se debe tener en cuenta que:

- Para sumar fracciones con **igual denominador** se suman los numeradores y se escribe el mismo denominador.
- Para sumar fracciones con **diferente denominador** se halla el mínimo común múltiplo de los denominadores y se simplifica cada fracción para obtener fracciones con igual denominador. Luego, se realiza la suma de fracciones con igual denominador.

EJEMPLOS

1. Efectuar la siguiente adición.

$$-\frac{14}{15} + \frac{11}{15}$$

Como las fracciones tienen igual denominador se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} -\frac{14}{15} + \frac{11}{15} &= -\frac{3}{15} && \text{Se suman los numeradores.} \\ &= -\frac{1}{5} && \text{Se simplifica la fracción.} \end{aligned}$$

Por tanto, la suma de $-\frac{14}{15}$ y $\frac{11}{15}$ es $-\frac{1}{5}$.

2. Resolver.

De los animales en vías de extinción se tiene que $\frac{15}{58}$ son tortugas y $\frac{11}{116}$ son mamíferos marinos. ¿Qué fracción representa el número de tortugas y mamíferos marinos en vías de extinción?

Se calcula la suma de ambas fracciones. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

$$\text{mcm}(58, 116) = 116 \quad \text{Se halla el mcm de 58 y 116.}$$

$$\frac{15}{58} + \frac{11}{116} \quad \text{Se plantea la suma.}$$

$$= \frac{30}{116} + \frac{11}{116} \quad \text{Se simplifican las fracciones.}$$

$$= \frac{41}{116} \quad \text{Se suman los numeradores.}$$

Por tanto, la fracción de tortugas y mamíferos marinos en vía de extinción es:

$$\frac{41}{116}$$



Historia de las matemáticas

¿Cómo sumaban fracciones los egipcios?



Los egipcios aplicaban fracciones unitarias (con numerador 1) en la resolución de problemas. En los papiros se encontraban reglas para sumar fracciones tales como:

“La suma de dos fracciones iguales, de denominador par, es igual a una fracción cuyo denominador es la mitad del denominador inicial”.



2.2 Sustracción de racionales en forma de fracción

En la sustracción de fracciones se aplica el mismo procedimiento que en la adición, es decir, cuando los denominadores son iguales se restan los numeradores y cuando son diferentes, se halla el mcm, se complican las fracciones y se restan.

EJEMPLOS

1. Restar $\frac{79}{45}$ de $\frac{49}{45}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{49}{45} - \frac{79}{45} \quad \text{Se plantea la resta.}$$

$$= -\frac{30}{45} = -\frac{2}{3} \quad \text{Se restan los numeradores y se simplifica.}$$

Por tanto, si se resta $\frac{79}{45}$ de $\frac{49}{45}$ la diferencia es $-\frac{2}{3}$.

2. La velocidad de dos automóviles es de $\frac{185}{3}$ km/h y $\frac{201}{4}$ km/h. ¿Cuál es la diferencia entre las dos velocidades?

Para calcular la diferencia entre las dos velocidades se realizan los siguientes pasos:

$$\text{mcm}(3, 4) = 12 \quad \text{Se halla el mcm de los denominadores.}$$

$$\frac{185}{3} - \frac{201}{4} \quad \text{Se plantea la resta.}$$

$$= \frac{740}{12} - \frac{603}{12} \quad \text{Se complican las fracciones.}$$

$$= \frac{137}{12} \quad \text{Se restan los numeradores.}$$

La diferencia entre las velocidades es de $\frac{137}{12}$ km/h.

3. La fracción de partidos de tenis que ha ganado July es de $\frac{11}{15}$ y la fracción de partidos de tenis ganados por Pilar es de $\frac{7}{12}$. Si cada una juega 100 partidos con el mismo rendimiento, ¿cuál será la diferencia entre los partidos ganados de las jugadoras?

Se realiza la resta entre fracciones.

$$\text{mcm}(12, 15) = 60 \quad \text{Se halla el mcm de 12 y 15.}$$

$$\frac{11}{15} - \frac{7}{12} \quad \text{Se plantea la sustracción.}$$

$$= \frac{44}{60} - \frac{35}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} \quad \text{Se complican las fracciones, se restan los numeradores y se simplifican los denominadores.}$$

Entonces, la diferencia entre las fracciones es $\frac{3}{20}$.

Para determinar la diferencia en el número de partidos, si juegan 100, se complica el resultado anterior así:

$$\frac{3}{20} \times 5 = \frac{15}{100}$$

Luego, entre las jugadoras habría una diferencia de 15 partidos ganados si juegan 100 partidos con el mismo rendimiento.

Matemáticamente

Si $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{5}$ y $c = -\frac{3}{7}$, ¿cuál es el resultado de $(b - a) + c$?



2.3 Adición de racionales en forma de número decimal



Recurso imprimible

Para sumar números decimales se realizan los siguientes pasos:

Primero, se escriben los números, uno debajo del otro, de tal forma que la coma quede siempre alineada.

Luego, se efectúa la adición como si fueran números enteros.

Finalmente, se coloca la coma en la suma, alineada con la coma de los sumandos.

2.4 Sustracción de racionales en forma de número decimal

Para restar números decimales se realizan los siguientes pasos:

Primero, se verifica que ambos números tengan la misma cantidad de cifras decimales, de no ser así se completan estas cifras agregando ceros.

Luego, se realiza la resta como si fueran números enteros.

Finalmente, se ubica la coma en la diferencia, de tal forma que quede alineada con la del minuendo y la del sustraendo.

EJEMPLOS

- El precio de una acción de tres empresas *A*, *B* y *C* en la Bolsa de valores de Colombia es de \$14.973,31, \$26.548,2 y \$27.210,33, respectivamente. Si se comprara una acción de cada empresa, ¿cuál sería el costo total?



Para calcular el costo total se debe hallar la suma del precio unitario de las acciones de las tres empresas. Para esto, se escriben los números decimales en forma vertical de tal manera que la coma quede alineada y se halla la suma así:

$$\begin{array}{r}
 14.973,31 \\
 26.548,2 \\
 + 27.210,33 \\
 \hline
 68.731,84
 \end{array}$$

Por tanto, el costo total de las tres acciones es de \$68.731,84.

- Diego y Sebastián son jugadores de béisbol. Diego tiene un promedio de bateo de 0,666 y Sebastián de 0,52. ¿Cuál es la diferencia entre el promedio de bateo de ambos jugadores?



Primero, como 0,666 tiene tres cifras decimales y 0,52 solo tiene dos cifras decimales, entonces se escribe un cero en la cifra de las milésimas del número 0,52.

Luego, se escribe un número debajo del otro y se realiza la resta así:

$$\begin{array}{r}
 0,666 \\
 - 0,520 \\
 \hline
 0,146
 \end{array}$$

Finalmente, la diferencia entre el promedio de bateo de ambos jugadores es de 0,146.



2.5 Propiedades de la adición en los números racionales

La adición de números racionales cumple las siguientes propiedades:

Recuerda que...

Las propiedades de la adición se cumplen para todos los números racionales, independientemente de que estén expresados como fracción o como número decimal.

Propiedades de la adición de racionales

Clausurativa	La adición de dos números racionales es un número racional, es decir, si $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ entonces, $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Conmutativa	El orden en el que se suman dos números racionales no altera el resultado. $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + \frac{m}{n}$
Asociativa	La adición de más de dos números racionales se puede efectuar agrupando los sumandos de diferente forma y el resultado no se altera. $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right) + \frac{r}{s} = \frac{m}{n} + \left(\frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right)$
Elemento neutro	El elemento neutro de la adición es el 0 ya que al sumar cualquier número racional con 0 se obtiene el mismo número. $\frac{p}{q} + 0 = \frac{p}{q}$
Elemento simétrico u opuesto aditivo	La suma entre un número racional y su opuesto aditivo es 0. $\frac{p}{q} + \left(-\frac{p}{q}\right) = 0$

EJEMPLO

Verificar la propiedad asociativa de la adición, mediante la resolución del siguiente problema.

De los estudiantes de un colegio $\frac{1}{3}$ solo practica fútbol, $\frac{2}{7}$ solo practica baloncesto y $\frac{1}{5}$ solo practica voleibol. ¿Qué fracción de los estudiantes del colegio representa la cantidad de estudiantes que juegan solo uno de estos tres deportes?

Primero, se halla el mcm de los denominadores. En este caso, $\text{mcm}(3, 5, 7) = 105$.

Luego, para verificar la propiedad asociativa se plantea la suma de las tres fracciones y se resuelve agrupando los sumandos de formas diferentes, así:

$$\begin{array}{lcl}
 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7}\right) + \frac{1}{5} & \left| \right. & \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{5}\right) \\
 = \left(\frac{35}{105} + \frac{30}{105}\right) + \frac{21}{105} & \left| \right. & = \frac{35}{105} + \left(\frac{30}{105} + \frac{21}{105}\right) \\
 = \left(\frac{65}{105}\right) + \frac{21}{105} & \left| \right. & = \frac{35}{105} + \left(\frac{51}{105}\right) \\
 = \frac{86}{105} & \left| \right. & = \frac{86}{105}
 \end{array}$$

Se agrupan los sumandos.
Se simplifican las fracciones.
Se resuelve la suma que está entre el paréntesis.
Se efectúa la suma.

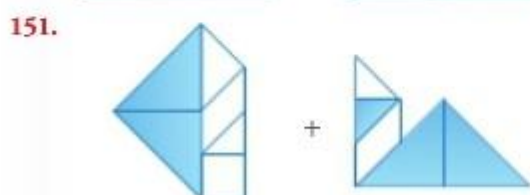
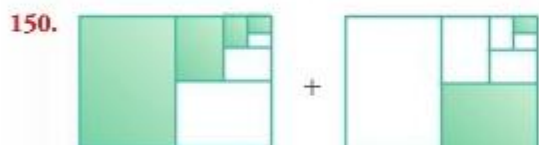
Finalmente, se verifica que al realizar la suma agrupando los sumandos de diferente forma, se obtiene que la fracción de los estudiantes que practican solo uno de los tres deportes es $\frac{86}{105}$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

I Determina la adición de los números racionales representados gráficamente.



E Resuelve las operaciones y descubre el nombre de la principal reserva de la biosfera en Colombia.

152. $\frac{3}{7} + \frac{2}{5}$ A

153. $-\frac{1}{8} + \frac{5}{6}$ U

154. $\frac{9}{16} + (-\frac{11}{64})$ G

155. $(-\frac{7}{40}) + \frac{7}{16}$ M

156. $(-\frac{2}{15}) + (-\frac{1}{12})$ L

157. $\frac{9}{7} - \frac{1}{21}$ D

158. $\frac{7}{30} - \frac{2}{45}$ R

159. $-\frac{8}{27} - \frac{8}{81}$ O

160. $\frac{3}{32} - (-\frac{1}{48})$ E

161. $-\frac{1}{28} - (-\frac{1}{42})$ N

$-\frac{1}{84}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{26}{21}$	$-\frac{32}{81}$	$\frac{26}{21}$	$\frac{11}{96}$
-----------------	-----------------	-----------------	------------------	-----------------	-----------------

$\frac{29}{35}$	$-\frac{13}{60}$	$\frac{21}{80}$	$\frac{29}{35}$	$\frac{25}{64}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{11}{96}$	$\frac{17}{90}$
-----------------	------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

R Completa los espacios en blanco en cada operación.

162.
$$\begin{array}{r} \square, 2 \square \\ + 5, \square 9 \\ \hline 8, 5 7 \end{array}$$

164.
$$\begin{array}{r} \square 4, 1 \square 7 \\ + 3 1, \square 6 \square \\ \hline 7 \square 0 1 2 \end{array}$$

163.
$$\begin{array}{r} \square, 3 \square 8 \\ - 6, \square 9 \square \\ \hline 0, 9 0 1 \end{array}$$

165.
$$\begin{array}{r} 5 6, 2 1 \square \\ - \square \square \square 8 \\ \hline 1 5, 4 3 1 \end{array}$$

E Resuelve las operaciones y con base en los resultados, colorea el camino a la casa del niño.

166. $3,025 + 0,21$

170. $5,201 - 5,03$

167. $4,02 + (-1,2)$

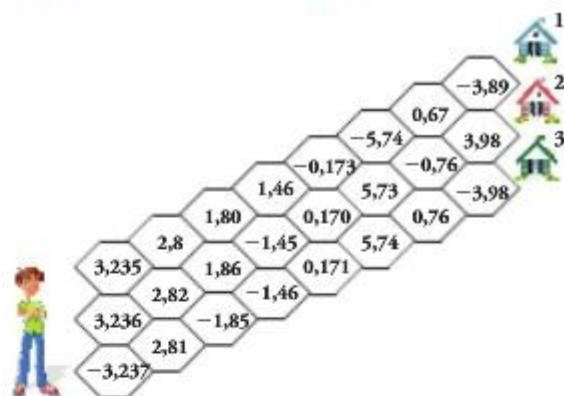
171. $1,84 - (-3,9)$

168. $-7,24 + 9,1$

172. $4 - 3,24$

169. $-0,25 + (-1,21)$

173. $-1,67 - 2,31$



I Escribe V o F, verdadero o falso, según el caso. Justifica tu respuesta.

174. La resta entre dos números racionales es conmutativa. ()

175. El inverso aditivo de $-\frac{10}{21}$ es $\frac{10}{21}$. ()

176. Existe un número racional x tal que $\frac{a}{b} - x = \frac{a}{b}$. ()

R Realiza las siguientes operaciones.

177. $(-0,25) + \frac{1}{4} - (0,32 + \frac{1}{5})$

178. $\frac{3}{10} - (1,56 + \frac{4}{5}) - (-3,2) + \frac{1}{10}$



R Lee, observa y determina el valor de cada expresión.

Las letras a , b y c representan valores diferentes.

$$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{3} \text{ y } c = -1$$

Sustituye el valor de las letras como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a + b + c &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + (-1) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{3} - 1 \\ &= -\frac{3}{6} + \frac{10}{6} - \frac{6}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

179. $(b + c) - a$

180. $a + (c - b)$

181. $[a + (-b + c) - c]$

182. $-a - (b + c)$

183. $-a - (-b + c) + a + b$

E Encuentra el área sombreada si se conoce el área de cada figura.

184.



Área del rectángulo: $\frac{23}{36} \text{ m}^2$

Área del triángulo: $\frac{23}{72} \text{ m}^2$

185.



Área del rombo: $\frac{25}{27} \text{ m}^2$

Área del círculo: $\frac{12}{81} \text{ m}^2$

S Lee y resuelve.

A continuación se muestra la longitud de tres pingüinos:

Pingüino de anteojos: 0,65 m

Pingüino Humboldt: 0,72 m

Pingüino emperador: 1,15 m



186. ¿Cuál es la diferencia de longitud entre el pingüino emperador y el pingüino de anteojos?

187. ¿Cuál es la diferencia de longitud entre el pingüino Humboldt y el pingüino de anteojos?

188. ¿Cuál es la diferencia de longitud entre el pingüino emperador y el pingüino Humboldt?

S Lee, observa y resuelve.

La torre Eiffel es una estructura de hierro situada en la ciudad de París, Francia. Es uno de los monumentos más visitados del mundo. La figura muestra las dimensiones de cada sección de la torre.



189. Determina la altura de la torre Eiffel.

190. ¿Cuántos metros tiene la base de la torre?

191. ¿Cuál es la diferencia entre la sección más larga y la más corta?

S Lee y responde.

El índice de audiencia de televisión es un puntaje que se da a los programas a partir del porcentaje de personas que ven dicho programa.

La siguiente tabla muestra el índice de audiencia obtenido por dos programas de televisión durante dos semanas.

Programa	Semana I	Semana II
A	9,86	12,23
B	11,5	10,47



192. ¿En cuánto aumentó el índice de audiencia del programa A?

193. ¿En cuánto disminuyó el índice de audiencia del programa B?

194. ¿Cuál fue la diferencia en puntos del índice de audiencia del programa A y B en la primera semana?

195. ¿Cuál fue la diferencia en puntos del índice de audiencia del programa A y B en la segunda semana?



2.6 Multiplicación de racionales en forma de fracción



Recurso imprimible



Actividad

Para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ donde $b, d \neq 0$.

En la multiplicación de números racionales también se aplica la ley de signos, es decir, el producto de dos números racionales es positivo si los números tienen el mismo signo y es negativo si los números tienen signos diferentes.

2.7 Multiplicación de racionales decimales

Para multiplicar dos números decimales se multiplican los factores como si fueran números enteros. Luego, en el producto, se separan con una coma tantas cifras decimales como tienen los dos factores.

Por ejemplo, la multiplicación de 3,24 por 1,3 se realiza así:

$$\begin{array}{r}
 3,24 \\
 \times 1,3 \\
 \hline
 972 \\
 324 \\
 \hline
 4,212
 \end{array}$$

Dos cifras decimales
Una cifra decimal

Tres cifras decimales

2.8 Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Q}$

Al multiplicar números racionales se aplican las siguientes propiedades.

Propiedades de la multiplicación de racionales	
Clausurativa	El producto de dos números racionales es un número racional. Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, entonces, $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}$
Conmutativa	El orden de los factores no altera el producto. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$
Asociativa	En la multiplicación de tres o más números racionales se pueden agrupar los factores de diferente forma y no cambia el producto. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$
Elemento neutro	La multiplicación de un número racional por 1 es igual mismo número. $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$
Inverso multiplicativo	El inverso multiplicativo de un número racional $\frac{a}{b}$, con a y b diferentes de cero, es el número racional $\frac{b}{a}$, tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$
Distributiva	Esta propiedad relaciona la multiplicación de racionales con respecto a la suma. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right)$

Recuerda que...

Para multiplicar un número entero por una fracción, se multiplica el número por el numerador y se deja el mismo denominador.



EJEMPLOS

1. Calcular el producto de $\frac{3}{7}$ por $\frac{5}{6}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\left(\frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{Se plantea la multiplicación.}$$

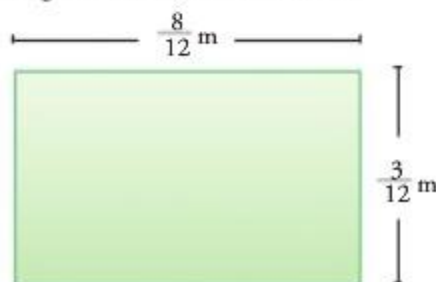
$$= \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 6} \quad \text{Se multiplican los numeradores y los denominadores.}$$

$$= \frac{15}{42} \quad \text{Se calcula el producto.}$$

$$= \frac{5}{14} \quad \text{Se simplifica.}$$

Por tanto, el producto de $\frac{3}{7}$ por $\frac{5}{6}$ es igual a $\frac{5}{14}$.

2. Hallar el área del rectángulo en centímetros cuadrados.



Primero, se simplifican las fracciones que indican las dimensiones del rectángulo.

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Segundo, se convierten las dimensiones del rectángulo a centímetros. Para esto, se multiplican ambas medidas por 100.

$$\left(\frac{2}{3}\right) \cdot 100 = \frac{200}{3} \text{ y } \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 100 = \frac{100}{4} = 25$$

Luego, se multiplica la medida del largo por la medida del ancho para hallar el área del rectángulo.

$$A = \left(\frac{200}{3}\right) \cdot 25 = \frac{5.000}{3}$$

Finalmente, se tiene que el área del rectángulo es $\frac{5.000}{3}$ centímetros cuadrados.

3. Calcular el producto de $\frac{2}{7}$ por la suma de $\frac{1}{9}$ más $\frac{3}{5}$ utilizando las propiedades de la multiplicación.

$$\left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\right] \quad \text{Se plantea la multiplicación.}$$

$$= \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}\right) \quad \text{Se aplica la propiedad distributiva.}$$

$$= \left(\frac{2}{63}\right) + \left(\frac{6}{35}\right) \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= \frac{448}{2.205} \quad \text{Se suma.}$$

$$= \frac{64}{315} \quad \text{Se simplifica.}$$



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono

I Responde. Explica con un ejemplo.

196. ¿Cómo se multiplican dos números racionales en forma de fracción?
197. ¿Cuál es el procedimiento que se realiza para multiplicar un número racional en forma de fracción por un número racional decimal?

I Lee y responde.

Mónica tiene una colección de 24 tipos de bolígrafos, distribuidos de la siguiente manera:

$\frac{3}{4}$ del total tienen tinta negra.

$\frac{1}{4}$ del total tienen tinta azul.



198. ¿Qué operación se debe efectuar para determinar cuántos bolígrafos de tinta negra hay en la caja?
199. ¿Cuántos bolígrafos tienen tinta azul?
200. Si $\frac{1}{3}$ de los bolígrafos de tinta negra tienen pasta de color morado, ¿qué fracción de bolígrafos de pasta morada hay en la caja?

I Escribe V o F, verdadero o falso, según corresponda. Justifica tu respuesta.

201. En la multiplicación con números racionales, el orden de los factores no afecta el producto. ()
202. El inverso multiplicativo de $\frac{7}{4}$ es $-\frac{7}{4}$. ()
203. El elemento neutro de la multiplicación entre racionales es 1. ()

R Relaciona cada multiplicación con una figura. Luego, escribe la fracción que corresponde al producto.

204. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$



205. $\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{4}$



206. $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4}$

**E** Realiza las multiplicaciones indicadas.

207. $\frac{7}{3} \cdot \frac{11}{21}$ 213. $(-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{10}{21})$
208. $\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{8}$ 214. $\frac{11}{42} \cdot \frac{33}{25}$
209. $(-\frac{5}{12}) \cdot \frac{1}{6}$ 215. $(-\frac{18}{45}) \cdot \frac{28}{36} \cdot (-\frac{3}{63})$
210. $\frac{8}{9} \cdot (-\frac{3}{5})$ 216. $\frac{12}{17} \cdot (-\frac{12}{25}) \cdot \frac{1}{6}$
211. $-0,2 \cdot (-\frac{1}{4})$ 217. $0,69 \cdot (-\frac{170}{20})$
212. $(-2,55) \cdot (-1,4)$ 218. $(-0,25) \cdot (0,9)$

E Calcula las siguientes multiplicaciones. Luego, ordena de mayor a menor los resultados y descubre la frase escondida.

219. $3,24 \times 2,21$ ES
220. $72,85 \times 0,2$ LA
221. $-0,01 \times 72,3$ LA
222. $12,8 \times -0,02$ DE
223. $9,24 \times 0,25$ PRINCIPIO
224. $-13,29 \times -1,01$ DUDA
225. $15,32 \times -0,3$ SABIDURÍA
226. $-89,23 \times -0,05$ EL

Frase: _____

M Representa cada situación como una multiplicación de números racionales. Luego, resuélvela.

227. En un colegio, los $\frac{2}{5}$ de estudiantes son hombres y de ellos $\frac{1}{2}$ están en bachillerato. ¿Qué fracción representa a los hombres que hay en bachillerato?
228. En una ciudad hay 48.000 personas de las cuales $\frac{5}{8}$ son mujeres y $\frac{1}{3}$ de ellas son menores de edad. ¿Cuántas mujeres menores de edad hay en la ciudad?
229. A un hospital ingresan 72 personas de urgencias, de las cuales $\frac{1}{4}$ presentan problemas cardíacos y de ellos, $\frac{2}{3}$ son mayores de 60 años. ¿Cuántas personas mayores de 60 años ingresaron por problemas cardíacos?



Actividad

**Recuerda que...**

Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ y $a \div b = c$, entonces, a es el dividendo, b es el divisor y c es el cociente.

2.9 División de racionales en forma de fracción

Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$$\text{Si } \frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{R}, \text{ entonces, } \frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) \text{ donde } n, p, q \neq 0$$

En este caso también se aplica la ley de signos, es decir, si los dos números racionales tienen el mismo signo, entonces el cociente es positivo y si los dos números tienen signos diferentes, el cociente es negativo.

La división entre fracciones se puede expresar como una fracción, en la que el dividendo es el numerador y el divisor es el denominador. Este tipo de fracciones se denominan **fracciones complejas**.

Por ejemplo, la división $\frac{m}{n} \div \frac{p}{q}$ se puede expresar como fracción compleja así:

$$\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Es decir, al resolver una fracción compleja, resulta una fracción cuyo numerador es el producto de los valores extremos y cuyo denominador es el producto de los valores que están en el medio.

EJEMPLOS

1. Calcular el cociente de $-\frac{2}{5}$ entre $\frac{4}{6}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{5} \div \frac{4}{6} && \text{Se plantea la división.} \\ & = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{6}{4}\right) && \text{Se expresa como una multiplicación.} \\ & = -\frac{3}{5} && \text{Se resuelve la multiplicación y se simplifica.} \end{aligned}$$

Por tanto, el cociente es $-\frac{3}{5}$.

2. Se tiene un vaso con capacidad de $\frac{1}{4}$ de litro, ¿cuántas veces se debe utilizar este vaso para llenar con agua una jarra de $\frac{7}{2}$ litros?

En este caso se divide la capacidad de la jarra entre la capacidad del vaso. Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \frac{7}{2} \div \frac{1}{4} && \text{Se plantea la división.} \\ & = \left(\frac{7}{2}\right) \cdot \left(\frac{4}{1}\right) && \text{Se expresa como una multiplicación.} \\ & = \frac{28}{2} && \text{Se multiplica.} \\ & = 14 && \text{Se divide.} \end{aligned}$$

Por tanto, se debe utilizar 14 veces el vaso para llenar la jarra.





2.10 División de racionales en forma de decimales



Ampliación multimedia



Recurso imprimible



Actividad

Para dividir dos números decimales, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se expresan tanto el dividendo como el divisor con igual número de cifras decimales. Para esto, se agregan ceros al número que tenga menos cifras decimales.

Luego, se escriben el dividendo y el divisor sin tener en cuenta las comas decimales.

Finalmente, se efectúa la división como si fueran números enteros.

Por ejemplo, para calcular el cociente de $-183,3$ entre $6,11$, se le agrega un cero a las cifras decimales de $-183,3$ y se realiza la división así:

$$\begin{array}{r} 18330 \quad | \quad 611 \\ -1833 \quad | \quad 30 \\ \hline 00 \end{array}$$

Como el dividendo es negativo y el divisor es positivo, entonces el cociente es negativo. Por tanto, se tiene que $(-183,3) \div 6,11 = -30$.

EJEMPLOS

1. En un laboratorio se requieren envasar 12,25 mililitros de colorante en recipientes de 0,49 mililitros. ¿Cuántos recipientes se necesitan para envasar el colorante?

Primero, se debe dividir la cantidad de colorante entre la capacidad de cada recipiente.

Luego, como ambos números tienen la misma cantidad de cifras decimales, entonces se realiza la división sin tener en cuenta la coma.

Finalmente, se tiene que para envasar los 12,25 mL de colorante se necesitan 25 recipientes de 0,49 mL.

$$\begin{array}{r} 1225 \quad | \quad 49 \\ -98 \quad | \quad 25 \\ \hline 245 \\ -245 \\ \hline 0 \end{array}$$

2. Juan Pablo tiene 155.757 pesos y desea cambiarlos por dólares. Si el precio del dólar en ese momento es de 1.854,25 pesos, ¿cuántos dólares puede comprar?

Primero, se debe dividir la cantidad de dinero que tiene Juan Pablo entre el precio del dólar. Como 1.854,25 tiene dos cifras decimales entonces se agregan dos ceros a 155.757.

Luego, se efectúa la división sin tener en cuenta la coma decimal.

$$\begin{array}{r} 15575700 \quad | \quad 185425 \\ -1483400 \quad | \quad 84 \\ \hline 741700 \\ -741700 \\ \hline 0 \end{array}$$

Finalmente, se tiene que con \$155.757 Juan Pablo puede comprar 84 dólares, si el precio de cada dólar es de \$1.854,25.



Matemáticamente

¿Cómo se efectúa la división de 0,18 entre 6,1?

**Afianzo COMPETENCIAS**

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Explica con un ejemplo.

230. La división entre dos números racionales en forma de fracción.

231. La división entre dos números racionales decimales.

E Resuelve las divisiones.

232. $\frac{9}{5} \div \frac{6}{11}$

237. $\frac{21}{16} \div \left(-\frac{3}{8}\right)$

233. $\frac{8}{9} \div \frac{2}{5}$

238. $\frac{65}{24} \div \frac{13}{4}$

234. $\left(-\frac{7}{6}\right) \div \frac{11}{12}$

239. $\left(-\frac{28}{15}\right) \div \left(-\frac{14}{9}\right)$

235. $\frac{13}{24} \div \left(-\frac{26}{9}\right)$

240. $\frac{7}{25} \div \left(-\frac{13}{5}\right)$

236. $\left(-\frac{35}{4}\right) \div \left(-\frac{28}{9}\right)$

241. $\left(-\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{45}{8}\right)$

I Descubre el error en algunas soluciones. Explica tus respuestas. Luego, corrígelas.

242. $\left(-\frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right) = 1$

243. $(0,1) \div (-0,01) = -10$

244. $(-1,3) \div (-0,2) = -6,5$

245. $\left(-\frac{7}{4}\right) \div (-0,5) = \frac{7}{2}$

R Simplifica las siguientes fracciones complejas.

246. $\frac{\frac{6}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{9}{8}}$

248. $\frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{15} - \frac{8}{15}}{\frac{7}{15} - \frac{2}{3}}$

247. $1 + \frac{2 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{6}}{\frac{1}{3}}}$

249. $4 - \frac{1 + \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{1}{4}}}{2 + \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{3}}}$

R Encuentra la medida del lado que falta en cada figura a partir de la información dada.

250.  $\frac{45}{8} \text{ m}$ Área $\frac{260}{3} \text{ m}^2$

251.  $\frac{55}{3} \text{ m}$ Área $\frac{317}{4} \text{ m}^2$

R Responde.

252. ¿ $\left(-\frac{1}{2}\right) \div 2$ es mayor que $(-0,25) \cdot (-0,5)$?

S Lee y resuelve.

253. Para confeccionar una chaqueta se requieren 3,25 metros de tela. Si se tienen 22,75 metros de tela, ¿cuántas chaquetas se pueden confeccionar?

254. Una máquina perforadora realiza una perforación en un pozo petrolero de 830,52 m de profundidad. Si en 12,5 horas ha perforado su totalidad, ¿cuántos metros perforó por hora?



255. Para pintar $\frac{72}{5} \text{ m}^2$ se requiere $\frac{1}{4}$ de galón de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados se pintan con un galón de pintura? ¿cuántos metros cuadrados se pintarán con 2 galones de pintura?

256. Un coco tiene en promedio 0,4 litros de agua. Si cada jugo tropical a base de agua de coco producido por una compañía contiene 0,125 L, ¿cuántos cocos son necesarios para preparar 50 jugos?

**Lo que viene...**

A continuación, aprenderás sobre la potenciación de números racionales. ¿A cuánto equivale la expresión $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$?



2.11 Potenciación de números racionales

La **potenciación** es la operación que permite escribir y calcular el producto de una multiplicación con factores iguales. Esto es,

$$\text{Si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+, \text{ entonces } \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ factores}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Por ejemplo, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$, de donde, $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. En general, para calcular la potencia de un número racional en forma fraccionaria, se eleva el numerador y denominador al exponente n de la potencia dada, así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

En esta expresión $\frac{a}{b}$ es la **base**, n es el **exponente** y $\frac{a^n}{b^n}$ es la **potencia**.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes potencias.

a. $(2,01)^2$

En este caso el exponente indica que 2,01 se multiplica dos veces por sí mismo. Por tanto, se tiene que $(2,01)^2 = (2,01) \cdot (2,01) = 4,0401$.

b. $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

Como el exponente es 4, entonces se tiene que:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{(-3)^4}{(2)^4} = \frac{81}{16}$$

2. El lado de una baldosa cuadrada mide 47,5 cm. ¿Cuál es el área de una de estas baldosas?

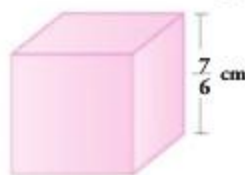
Primero, se expresa el área como una potencia. Como el lado mide 47,5 cm, entonces el área es $A = (47,5)^2$.

Luego, se tiene que $A = (47,5)^2 = (47,5) \cdot (47,5) = 2.256,25$.

Finalmente, el área de una baldosa es 2.256,25 cm².

3. Determinar el volumen de la caja cúbica.

Primero, se tiene que el volumen de un cubo es igual a la medida de su arista al cubo.



Luego, se resuelve la potencia así:

$$\left(\frac{7}{6}\right)^3 = \left(\frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7^3}{6^3} = \frac{343}{216}$$

Finalmente, el volumen de la caja cúbica es de $\frac{343}{216}$ cm³.

Recuerda que...

Si la base de la potenciación es negativa y el exponente es par, el resultado es positivo, pero si el exponente es impar, el resultado es negativo.



Ampliación
multimedia

Propiedades de la potenciación de racionales

Las propiedades de la potenciación de números racionales permiten simplificar algunas expresiones que involucren multiplicación y división con potencias. La siguiente tabla contiene las propiedades de la potenciación de números racionales.

Recuerda que...

$$a^0 = 1, \text{ si } a \neq 0$$

Propiedades de la potenciación de racionales

Potencias de igual base	Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces, $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
Cociente de potencias de igual base	Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces, $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
Potencia con exponente negativo	Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{Z}^-$, entonces, $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$
Potencia de una potencia	Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, entonces, $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$
Potencia de un producto	Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces, $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m$
Potencia de un cociente	Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ y $m \in \mathbb{Z}$, entonces, $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{c}{d}\right)^m$

EJEMPLOS

Simplificar las siguientes expresiones aplicando las propiedades de la potenciación.

a. $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^8}{\left(\frac{9}{49}\right)^2}$

Se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^8}{\left(\frac{9}{49}\right)^2} \quad \text{Expresión dada.}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^8}{\left[\left(\frac{3}{7}\right)^2\right]^2} \quad \text{Se expresa como una potencia.}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^8}{\left(\frac{3}{7}\right)^4} \quad \text{Se aplica potencia de una potencia.}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{13}}{\left(\frac{3}{7}\right)^4} \quad \text{Se aplica el producto de potencias de igual base.}$$

$$= \left(\frac{3}{7}\right)^9 \quad \text{Se aplica el cociente de potencias de igual base.}$$

Por tanto, al simplificar la expresión resulta $\left(\frac{3}{7}\right)^9$.

b. $\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^6}{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6}$

Se realizan los siguientes pasos:

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^6}{\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^6} \quad \text{Se expresa como potencias positivas.}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6} \quad \text{Se aplica el cociente de potencias de igual base.}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{\left(\frac{2^6}{5^6}\right)}{\left(\frac{3^6}{5^6}\right)} \quad \text{Se aplica potencia.}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{(2^6) \cdot (5^6)}{(3^6) \cdot (5^6)} \quad \text{Se efectúa la división.}$$

$$= \frac{2^5}{3^7} \quad \text{Se simplifica.}$$

Por tanto, al simplificar la expresión se obtiene $\frac{2^5}{3^7}$.



Afianzo COMPETENCIAS

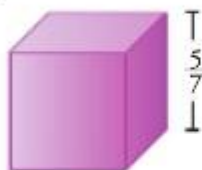
Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Observa las siguientes figuras. Luego, resuelve.

257. Expresa como una potencia el área del cuadrado.



258. Expresa como una potencia el volumen del cubo.



259. Completa la tabla.

Base	Exponente	Potencia	Resultado
$-\frac{1}{2}$		$(-\frac{1}{2})^2$	
		$(\frac{2}{3})^3$	
$-\frac{3}{4}$	3		
$\frac{2}{5}$	4		$\frac{16}{625}$

Escribe V o F, falso o verdadero, según el caso. Justifica tu respuesta.

260. El cuadrado de un número racional negativo es positivo. ()

261. El cubo de un número racional negativo es positivo. ()

262. El producto de potencias de igual base es una potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es el producto de los exponentes. ()

263. Al elevar una fracción a la cuatro, se eleva el numerador y el denominador. ()

Calcula el valor de cada potencia.

264. 3^1 267. $(-\frac{9}{3})^1$ 270. $(-\frac{4}{5})^0$

265. $(\frac{1}{3})^4$ 268. -2^3 271. $(\frac{1}{10})^3$

266. $(0,2)^3$ 269. $(2\frac{1}{3})^3$ 272. $(-0,3)^3$

Completa cada expresión teniendo en cuenta las propiedades de la potenciación.

273. $(\frac{12}{11})^{\square} \times (\frac{12}{11})^5 = (\frac{12}{11})^9$

274. $(\frac{8}{9})^{15} \div (\frac{8}{9})^{\square} = (\frac{\square}{\square})^6$

275. $[(\frac{7}{6})^4]^{\square} = (\frac{7}{6})^{28}$

276. $(\frac{2}{5})^9 \times (\frac{3}{7})^9 = (\frac{\square}{\square})^9$

277. $(\frac{9}{2})^{10} \div (\frac{4}{9})^{10} = (\frac{\square}{\square})^{10}$

278. $\frac{(\frac{1}{8})^4 \times (\frac{1}{8})^{\square}}{(\frac{\square}{\square})^7} = (\frac{1}{8})^6$

Simplifica cada expresión y calcula la potencia resultante.

279. $(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^1 \times (\frac{1}{3})^0$

280. $[(\frac{2}{3})^3] \div (\frac{2}{3})^2$

281. $[(\frac{1}{6})^5]^2 \div [(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{3})^3]^2$

Lee y resuelve.

Una fábrica de pasteles de hojaldre, los empaqueta en forma individual en cajas cúbicas de lado 9,5 cm.



282. ¿Cuál es el volumen de las cajas para empaquetar pasteles individualmente?

283. Si se empaquetan los pasteles en grupos de 25 cajas como muestra la figura, ¿cuál será el volumen de cada grupo de cajas?

Resuelve las siguientes potencias. Luego, ordénalas en forma creciente.

$(0,1)^3$ $(0,1)^{-2}$ $(0,1)^{-1}$ $(0,1)^2$

$(0,1)^0$ $(0,1)^1$ $(0,1)^{-3}$ 0^5



2.12 Radicación de números racionales



Actividad

Recuerda que...

Si $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^-$ y n es par, entonces, $\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ no es racional.

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d}$, se dice que $\frac{a}{b}$ es la raíz n -ésima de $\frac{c}{d}$. Es decir, $\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}$, si y solo si, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d}$.

La expresión $\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ se lee raíz n -ésima de $\frac{c}{d}$. En esta expresión se tiene que la **cantidad subradical** es $\frac{c}{d}$ y el **índice** es n .

Para extraer la raíz n -ésima de una fracción, se extrae la raíz n -ésima del numerador y del denominador así:

$$\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

EJEMPLOS

1. Calcular la medida de la arista de un recipiente cúbico cuyo volumen es $\frac{729}{512} \text{ dm}^3$. Para hallar la medida de la arista del recipiente se debe calcular la raíz cúbica del volumen.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{729}{512}} & \quad \text{Se plantea la raíz cúbica del volumen.} \\ &= \frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{512}} \quad \text{Se extrae la raíz cúbica del numerador y del denominador.} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9^3}}{\sqrt[3]{8^3}} \quad \text{Se expresa como potencia.} \\ &= \frac{9}{8} \quad \text{Se calcula la raíz cúbica.} \end{aligned}$$

Por tanto, la arista del recipiente cúbico mide $\frac{9}{8} \text{ dm}$.

2. Un salón de baile de forma cuadrada tiene $420,25 \text{ m}^2$. ¿Cuántos metros mide el lado del salón?

Para calcular la medida del lado del salón se debe extraer la raíz cuadrada de $420,25$, así:

$$\begin{aligned} \sqrt{420,25} & \quad \text{Se plantea la raíz cuadrada del número.} \\ &= \sqrt{\frac{42.025}{100}} \quad \text{Se expresa el número como una fracción decimal.} \\ &= \frac{\sqrt{42.025}}{\sqrt{100}} \quad \text{Se extrae la raíz cuadrada del numerador y del denominador.} \\ &= \frac{205}{10} \quad \text{Se calcula la raíz.} \\ &= 20,5 \quad \text{Se expresa como número decimal.} \end{aligned}$$

Por tanto, el lado del salón de baile mide $20,5 \text{ m}$.





Propiedades de la radicación

En la radicación de números racionales se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades de la radicación	
Raíz de un producto	Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ y $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ existen, se cumple que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
Raíz de un cociente	Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ y $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ existen, se cumple que: $\sqrt[n]{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \div \sqrt[n]{\frac{c}{d}}$
Raíz de una potencia	Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$, se cumple que $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \div n}$

Recuerda que...

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$$

EJEMPLOS

1. Calcular las siguientes raíces.

a. $\sqrt{\frac{1}{25}}$

$$\sqrt{\frac{1}{25}}$$

Radical.

$$= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{25}}$$

Se extrae la raíz cuadrada del numerador y del denominador.

$$= \frac{1}{5}$$

Se calculan las raíces.

b. $\sqrt[5]{-\frac{243}{1.024}}$

$$\sqrt[5]{-\frac{243}{1.024}}$$

Radical.

$$= -\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{1.024}}$$

Se extrae la raíz quinta del numerador y del denominador.

$$= -\frac{3}{4}$$

Se calcula la raíz quinta.

c. $\sqrt{1,44}$

Como $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}}$, entonces, al calcular la raíz cuadrada se tiene que:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{144}{100}} &= \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} \\ &= 1,2\end{aligned}$$

2. Simplificar la siguiente expresión.

$$\frac{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{256}}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{7}\right)^4}}$$

$$= \frac{\sqrt[2 \times 2]{\frac{1}{256}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{4 \div 2}}$$

Se aplica raíz de una raíz.

$$= \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{256}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{343}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2}$$

Se operan los exponentes.

$$= \frac{\sqrt[4]{1}}{\sqrt[3]{1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2}$$

Se extrae la raíz del numerador y del denominador de cada fracción.

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2}$$

Se calculan las raíces y la potencia.

$$= \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{49}}$$

Se multiplica.

$$= \frac{1}{\frac{1}{49}}$$

Se efectúa la división.

$$= \frac{343}{4}$$

Por tanto, la expresión equivale a $\frac{343}{4}$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

I Responde. Explica tu respuesta.

285. ¿Cómo se extrae la raíz n -ésima de un número racional?

286. ¿Cuál es la diferencia entre las raíces cuadrada, cúbica, cuarta y quinta?

E **287.** Completa la tabla.

Base de la raíz	Índice	Raíz n -ésima
$\frac{25}{64}$	2	
	3	$-\frac{1}{5}$
$-\frac{32}{243}$		$-\frac{2}{3}$
$\frac{256}{81}$	4	
$\frac{343}{216}$		$\frac{7}{6}$

I Escribe V (verdadero) o F (falso) y justifica.

288. Todo número racional tiene raíz cuadrada. ()

289. La raíz cúbica de un número racional negativo es negativa. ()

290. La raíz $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a \times c}{b \times d}}$. ()

291. La raíz $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ se puede expresar como $\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}$. ()

E Resuelve.

292. $\sqrt{\frac{1}{25}}$

296. $\sqrt{\frac{4}{36}}$

293. $\sqrt{\frac{169}{25}}$

297. $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$

294. $\sqrt[3]{\frac{216}{1.000}}$

298. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

295. $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$

299. $\sqrt[3]{-\frac{343}{729}}$

M Expresa cada situación con raíces y luego resuélvelas.

300. El área de un cuadrado es $1,44 \text{ cm}^2$. ¿Cuál es la medida de cada lado del cuadrado?

301. Un tanque de agua de forma cúbica puede almacenar $0,729 \text{ m}^3$ de agua. ¿Cuál es la medida de cada lado del cubo?

E Simplifica cada expresión, aplicando las propiedades de la raíz. Luego, resuelve.

302. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$

306. $\frac{\sqrt{\frac{12}{15}} \times \sqrt{\frac{12}{15}}}{\sqrt[3]{-\frac{1}{64}}}$

303. $\sqrt{\frac{5}{32}} \div \sqrt{\frac{2}{5}}$

307. $\frac{\sqrt{\frac{25}{32}} \div \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\frac{49}{81}\right)}}$

304. $\sqrt[3]{(0,36)^6}$

308. $\frac{\sqrt{1,21} \times \sqrt{0,16}}{\sqrt{0,27} \times \sqrt{3}}$

305. $\frac{\sqrt{0,81}}{\sqrt[3]{0,216} \times \sqrt{1,44}}$

309. $\frac{\sqrt{\frac{256}{625}}}{\sqrt{\frac{1}{9}} \times \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^6}}$

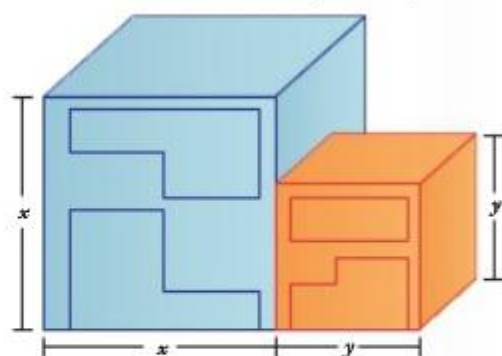
S Lee y responde.

Martín construye una piscina de forma cuadrada en un espacio de $20,25$ metros cuadrados.

310. ¿Cuál es la medida máxima del lado de la piscina?

S Lee, observa y responde.

Una galería de arte está diseñada con dos bloques cúbicos como se muestra en la siguiente figura.



311. Si el volumen del bloque mayor es de $166,375$ metros cúbicos y el volumen del bloque menor es de $29,791$ metros cúbicos, ¿cuál es la medida de cada lado de los bloques?

312. ¿Cuál es la medida del área de la cara de cada uno de los bloques?

313. ¿Cuál es el área superficial de toda la galería?



3. Polinomios aritméticos con números racionales



Recurso imprimible

Un **polinomio aritmético con números racionales** es una expresión en la cual se combinan números racionales con las operaciones aritméticas. En este caso, las operaciones son: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y la radicación de números racionales.

Existen dos tipos de polinomios aritméticos: polinomios en los que no aparecen signos de agrupación y polinomios en los que aparecen signos de agrupación. Por ejemplo:

■ **Sin signos de agrupación:** $\frac{3}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{10}{3} + \sqrt{\frac{121}{25}} \div \frac{9}{4} + 3^4$

■ **Con signos de agrupación:** $\frac{1}{2} - \left\{ -\frac{1}{6} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left[\left(-\frac{4}{3} + \frac{20}{5}\right) - \frac{8}{3} \times \frac{7}{9} \right] \right\}$

3.1 Polinomios aritméticos sin signos de agrupación

Para resolver un polinomio sin signos de agrupación se tiene en cuenta el siguiente orden de operaciones:

Primero, se resuelven las potencias y radicales.

Luego, se realizan las multiplicaciones y las divisiones.

Finalmente, se solucionan las adiciones y las sustracciones de izquierda a derecha.

EJEMPLOS

1. Resolver los polinomios.

a. $\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{6}\right) \div \frac{1}{3}$

$\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{6}\right) \div \frac{1}{3}$ Polinomio dado.

$= \frac{1}{4} + \left(-\frac{15}{6}\right)$ Se realiza la división.

$= \frac{3}{12} + \left(-\frac{30}{12}\right)$ Se expresa con denominador común.

$= -\frac{27}{12}$ Se suma.

$= -\frac{9}{4}$ Se simplifica.

Por tanto, $\frac{1}{4} + \left(-\frac{5}{6}\right) \div \frac{1}{3} = -\frac{9}{4}$.

b. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^3$ Polinomio dado.

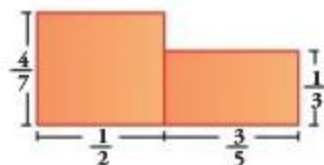
$= \frac{3}{4} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{27}{8}$ Se hallan la raíz y la potencia.

$= \frac{3}{4} - \frac{7}{24} + \frac{27}{8}$ Se multiplica.

$= \frac{18}{24} - \frac{7}{24} + \frac{81}{24} = \frac{92}{24} = \frac{23}{6}$ Se realizan las operaciones y se simplifica.

Por tanto, $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} - \frac{7}{6} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{23}{6}$.

2. Plantear un polinomio aritmético para determinar el área de la figura. Luego, resolverlo.



El polinomio aritmético asociado al área es:

$\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$ Polinomio.

Luego, el polinomio se resuelve así:

$\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{14} + \frac{3}{15}$ Se multiplica.

$= \frac{2}{7} + \frac{1}{5} = \frac{17}{35}$ Se simplifica y se suma.

Por tanto, el polinomio es $\frac{4}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{17}{35}$.



Polinomios aritméticos con números racionales decimales

Cuando los polinomios aritméticos se encuentran formados por números decimales y por operaciones aritméticas, se procede de la misma forma.

EJEMPLOS

1. Resolver los polinomios aritméticos.

a. $(-1,2)^2 + 0,6 \times (-5) + \sqrt{0,81}$
 $(-1,2)^2 + 0,6 \times (-5) + \sqrt{0,81}$ Polinomio dado.
 $= 1,44 + (-3) + \sqrt{0,81}$ Se hallan la potencia y el producto.
 $= 1,44 + (-3) + 0,9$ Se extrae la raíz cuadrada.
 $= -1,56 + 0,9$ Se realiza la resta.
 $= -0,66$ Se suma.

Por tanto, $(-1,2)^2 + 0,6 \times (-5) + \sqrt{0,81} = -0,66$.

b. $\sqrt{6,25} + \sqrt{0,64} \times \sqrt{1,21} - 0,7^2$
 $\sqrt{6,25} + \sqrt{0,64} \times \sqrt{1,21} - 0,7^2$ Polinomio dado.
 $= 2,5 + 0,8 \times 1,1 - 0,7^2$ Se calculan las raíces.
 $= 2,5 + 0,8 \times 1,1 - 0,49$ Se halla la potencia.
 $= 2,5 + 0,88 - 0,49$ Se realiza la multiplicación.
 $= 3,38 - 0,49$ Se suma.
 $= 2,89$ Se resta.

Por tanto, $\sqrt{6,25} + \sqrt{0,64} \times \sqrt{1,21} - 0,7^2 = 2,89$.

2. Leer y resolver.

- a. La medida del lado de la base de la pirámide de Keops en Egipto es de 230,36 metros y la altura de cada cara es de 146,9 metros. ¿Cuál es el área de las caras laterales de la pirámide de Keops?



Como la pirámide tiene cuatro caras y el área de cada cara corresponde al área de un triángulo de base 230,36 m y altura 146,9 m, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 4 \times 230,36 \times 146,9 \div 2 &= 921,44 \times 146,9 \div 2 \\ &= 135.359,536 \div 2 \\ &= 67.679,768 \end{aligned}$$

Por tanto, el área de las caras laterales de la pirámide de Keops es 67.679,768 m².

- b. Para disfrutar de un asado, Antonio compró 6,5 kg de carne, 2,125 kg de salchicha. Si el precio de 1 kg de carne fue \$7.500 y el de 1 kg de salchicha fue \$6.250, ¿cuánto dinero gastó Antonio en el asado?



Para determinar el dinero que gastó Antonio, se plantea el siguiente polinomio. Luego, se resuelve.

$$\begin{aligned} 6,5 \times 7.500 + 2,125 \times 6.250 \\ 6,5 \times 7.500 + 2,125 \times 6.250 &= 48.750 + 13.281,25 \\ &= 62.031,25 \end{aligned}$$

Por tanto, el dinero que gastó Antonio fue \$62.031,25.

- c. El peso máximo permitido del equipaje de mano de un pasajero en una aerolínea es 8 kg. Si Ana lleva en su bolso el computador portátil que pesa 3,5 kg y tres libros que pesan 0,6 kg cada uno, ¿cuánto debe pesar el resto del equipaje de mano de Ana para que sea admitido por la aerolínea?

Para calcular el peso del resto de accesorios que puede llevar Ana en su equipaje, se plantea y resuelve el siguiente polinomio.

$$\begin{aligned} 8 - [3,5 + 3 \times (0,6)] &= 8 - [3,5 + 1,8] \\ &= 8 - 5,3 \\ &= 2,7 \end{aligned}$$

Por tanto, el resto del equipaje de Ana debe pesar 2,7 kg.



3.2 Polinomios aritméticos con signos de agrupación



Recurso imprimible

Cuando un polinomio aritmético tiene signos de agrupación, primero se resuelven las operaciones indicadas en el interior de cada uno, teniendo en cuenta el orden de las operaciones. Luego, se elimina cada signo de agrupación de adentro hacia fuera, aplicando la ley de signos.

EJEMPLOS

1. Resolver los polinomios aritméticos.

a. $\frac{3}{4} - \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) \right]$

$$\frac{3}{4} - \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{3}{4} - \left[\frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{6} \right) \right]$$

Se realiza la resta del paréntesis.

$$= \frac{3}{4} - \left[-\frac{1}{18} \right]$$

Se realiza la multiplicación de los corchetes.

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{18} = \frac{23}{36}$$

Se elimina signo de agrupación y se resta.

Por tanto, $\frac{3}{4} - \left[\frac{1}{3} \times \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2} \right) \right] = \frac{23}{36}$.

b. $\frac{1}{5} - \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) - \left(3 - \frac{3}{4} \right) \right]$

$$\frac{1}{5} - \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) - \left(3 - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{1}{5} - \left[\frac{3}{4} + \left(-\frac{4}{10} \right) - \left(\frac{9}{4} \right) \right]$$

Se realizan las restas.

$$= \frac{1}{5} - \left[\frac{7}{20} - \frac{9}{4} \right]$$

Se suma y se suprime signo de agrupación.

$$= \frac{1}{5} - \left[-\frac{38}{20} \right]$$

Se resta.

$$= \frac{1}{5} + \frac{19}{10} = \frac{21}{10}$$

Se simplifica, se suprimen los corchetes y se suma.

Por tanto, $\frac{1}{5} - \left[\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) - \left(3 - \frac{3}{4} \right) \right] = \frac{21}{10}$.

c. $\frac{4}{3} \div \left\{ \left[\left(-\frac{1}{6} - 2 \right) \times \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{5}{8} \right]$

$$\frac{4}{3} \div \left\{ \left[\left(-\frac{1}{6} - 2 \right) \times \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{5}{8} \right]$$

Polinomio dado.

$$= \frac{4}{3} \div \left\{ \left[\left(-\frac{13}{6} \right) \times \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\left(\frac{1}{4} \right)^2 + \frac{5}{8} \right]$$

Se realizan las restas.

$$= \frac{4}{3} \div \left\{ \left[\left(-\frac{39}{12} \right) - \left(-\frac{1}{6} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\frac{1}{16} + \frac{5}{8} \right]$$

Se multiplica y se halla la potencia.

$$= \frac{4}{3} \div \left\{ -\frac{37}{12} \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\frac{11}{16} \right]$$

Se resta y se suma.

$$= -\frac{16}{37} + \frac{1}{12} - \left[\frac{11}{16} \right]$$

Se divide y se extrae la raíz cuadrada.

$$= -\frac{1.841}{1.776}$$

Se resuelven las operaciones.

Por tanto:

$$\frac{4}{3} \div \left\{ \left[\left(-\frac{1}{6} - 2 \right) \times \frac{3}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} + \sqrt{\frac{1}{144}} - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{5}{8} \right] = -\frac{1.841}{1.776}$$

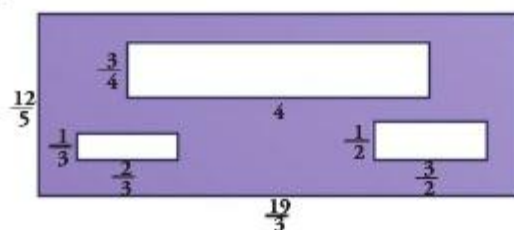
Recuerda que...

Los signos de agrupación usados en matemáticas son:

- () paréntesis
- [] corchetes
- { } llaves



2. Plantear un polinomio que represente el área sombreada de la siguiente figura. Luego, resolverlo.



Para hallar el área de la región sombreada del área del rectángulo mayor, se resta la suma de las áreas de los rectángulos del interior.

Luego, el polinomio es:

$$\left(\frac{12}{5} \times \frac{19}{3}\right) - \left[\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(4 \times \frac{3}{4}\right)\right]$$

Ahora, se resuelve el polinomio:

$$\left(\frac{12}{5} \times \frac{19}{3}\right) - \left[\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(4 \times \frac{3}{4}\right)\right] \quad \text{Polinomio dado.}$$

$$= \frac{228}{15} - \left[\frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{12}{4}\right]$$

Se realizan las multiplicaciones.

$$= \frac{76}{5} - \left[\frac{27}{36} + \frac{8}{36} + \frac{108}{36}\right]$$

Se simplifica y se expresan como fracciones homogéneas.

$$= \frac{76}{5} - \left[\frac{143}{36}\right]$$

Se realiza la suma.

$$= \frac{76}{5} - \frac{143}{36}$$

Se suprimen los corchetes.

$$= \frac{2.736}{180} - \frac{715}{180}$$

Se expresan las fracciones como fracciones homogéneas.

$$= \frac{2.021}{180}$$

Se resta.

$$\text{Por tanto, el área es: } \left(\frac{12}{5} \times \frac{19}{3}\right) - \left[\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) + \left(4 \times \frac{3}{4}\right)\right] = \frac{2.021}{180}.$$

3. Un camión transporta a la costa 8 bloques de mármol de 1,56 toneladas cada uno y 4 vigas de hierro de 0,64 toneladas cada una. Si la carga máxima que puede llevar el camión es 16 toneladas, ¿cuánto peso más puede soportar el camión?



Para determinar qué tanto peso más puede soportar el camión, se plantea el siguiente polinomio. Luego, se resuelve.

$$16 - [(8 \times 1,56) + (4 \times 0,64)] \quad \text{Se escribe el polinomio.}$$

$$= 16 - [(12,48) + (2,56)] \quad \text{Se realizan las multiplicaciones.}$$

$$= 16 - [12,48 + 2,56] \quad \text{Se suprimen los paréntesis.}$$

$$= 16 - [15,04] \quad \text{Se suma.}$$

$$= 0,96 \quad \text{Se resta.}$$

Por tanto, el camión puede soportar 0,96 toneladas más.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde. Explica con un ejemplo.

339. ¿Por qué es necesario usar signos de agrupación en polinomios aritméticos?

340. ¿Cómo se resuelve un polinomio aritmético de números racionales con signos de agrupación?

E Elimina los signos de agrupación y resuelve.

341. $\frac{5}{6} + \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) \times \frac{5}{4} \right]$

342. $-\frac{5}{2} - \left[\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} \right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) \right]$

343. $-\frac{8}{3} \times \left\{ \frac{5}{4} - \left[\frac{1}{6} - \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{2} \right) \right] \right\}$

344. $-\frac{5}{7} \div \left\{ \frac{15}{14} - \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3} \right) \right] \right\}$

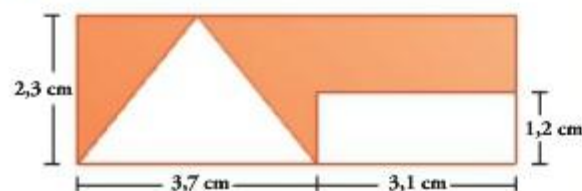
345. $\frac{3}{5} \times \left\{ \left[\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \right] \div \left[\frac{1}{3} - \frac{12}{5} \right] \right\}$

346. $\frac{3}{2} - \left\{ \left(\frac{1}{3} - 3 \right) \times \left[\left(1 - \frac{3}{5} \right) + \left(2 - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}$

347. $\sqrt{\frac{1}{16}} - \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]$

348. $(1,5)^2 - \left\{ \sqrt{1,21} + [(-1,8) \times (6,2 - 9,1)] \right\}$

R Observa la figura.



349. Plantea por medio de un polinomio aritmético el área de la región sombreada de la figura.

R Resuelve los polinomios si $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$ y $z = \frac{3}{4}$.

350. $x + (y \times z)$

351. $(x \div y) - (x \div z)$

352. $x + \left[\left(y + \frac{1}{3} \right) \times z \right]$

353. $x - [(y - z) \div (x + z)]$

354. $\frac{5}{2} + [x \times (y + z)]$

355. $z - \left\{ x + \left[y - \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}$

356. $-y \times [x - [z + (x + y - z)]]$

E Calcula la siguiente expresión para los valores que se indican en cada caso.

$$(a - b)^{-1} \cdot \sqrt{c}$$

357. $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ y $c = \frac{1}{4}$

358. $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$ y $c = \frac{1}{4}$

359. $a = 0,25$, $b = -0,25$ y $c = 0,25$

360. $a = -0,25$, $b = 0,25$ y $c = 0,25$

361. $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{4}{9}$ y $c = \frac{4}{9}$

362. $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{4}{9}$ y $c = \frac{4}{25}$

I Indica cuáles de las operaciones que se dan a continuación, tienen una respuesta equivocada. Justifica tu respuesta.

363. $-\frac{7}{10} - \left[-\frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] = -\frac{13}{20}$

364. $-\frac{9}{6} + \frac{3}{2} \left[-\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{10} + \frac{8}{15} \right) \right] = -4$

365. $\frac{4}{5} - \left[-\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{5} \right) \right] = -\frac{1}{3}$

366. $-\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) \right] = -\frac{1}{20}$

367. $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{1+2}} \right) \cdot \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{6}$

368. $\frac{1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3} \right)}{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}} = -\frac{3}{5}$

S Lee y resuelve.

El siguiente polinomio describe el trayecto de una partícula: $\frac{119}{2} \times \frac{114}{7} - \frac{1}{2} \times 9,8 \times (1,5)^2$.

369. ¿Cuál es el trayecto recorrido por la partícula?





4. Ecuaciones con números racionales



Ampliación multimedia

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay uno o varios valores desconocidos llamados variables o incógnitas, representados generalmente por una letra minúscula.

Así, $x - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ es una ecuación en la que se distinguen los siguientes elementos.

$$\underbrace{x - \frac{2}{5}}_{\text{Primer miembro}} = \underbrace{\frac{8}{5}}_{\text{Segundo miembro}}$$

Primer miembro Segundo miembro

4.1 Solución de ecuaciones con números racionales

Para resolver una ecuación en el conjunto de los números racionales, al igual que las ecuaciones en el conjunto de los números enteros, se aplica la propiedad uniforme de la igualdad.

Para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, con $b, d, f \neq 0 \in \mathbb{Q}$ se cumple que

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a}{b} - \frac{e}{f} = \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$
- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$

Cuando se resuelve una ecuación, se encuentra el valor de la variable que hace verdadera la igualdad. Por ejemplo, en la ecuación $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$, la solución es $x = 3$, ya que al remplazar x en la ecuación se obtiene:

$$\frac{2}{3} \times 3 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{Se sustituye } x \text{ por } 3.$$

$$\frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{Se multiplica.}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{Se resta y se obtiene una igualdad.}$$

Ecuaciones de la forma $x \pm \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Las ecuaciones $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ y $x - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$, son ejemplos de ecuaciones de la forma $x \pm \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Para resolver estas ecuaciones se suma o se resta un mismo número en los dos miembros de la igualdad. Es decir, se aplica la propiedad uniforme de la igualdad. Luego, se realizan las operaciones indicadas. Por ejemplo:

$$x + \frac{4}{3} = \frac{7}{2} \quad \text{Ecuación.}$$

$$x + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{2} - \frac{4}{3} \quad \text{Se resta } \frac{4}{3} \text{ en ambos miembros de la ecuación.}$$

$$x + 0 = \frac{21}{6} - \frac{8}{6} \quad \text{Se realiza la resta y se expresa como fracciones homogéneas.}$$

$$x = \frac{13}{6} \quad \text{Se resuelven las operaciones.}$$

Por tanto, la solución de $x + \frac{4}{3} = \frac{7}{2}$ es $x = \frac{13}{6}$.

Historia de las matemáticas

Ecuaciones



En el estudio de ecuaciones jugaron un papel muy importante los matemáticos árabes.

Uno de ellos fue Omar al-khayyam (1048-1131), quien se dedicó a la resolución de ecuaciones y escribió un libro sobre este tema titulado *Tratado de la cosa*. La *cosa* era justamente la incógnita.

Esta obra y muchas más fueron traducidas en España y en esa época esta palabra "cosa" se escribía como *xay*. Poco a poco se fue remplazando por su primera letra, la inicial *x*. Así se convirtió en el símbolo universal de la incógnita en todas las ecuaciones.

**Recuerda que...**

El producto de un número diferente de cero por su inverso multiplicativo es igual a 1.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$

Las ecuaciones $\frac{3}{4}x = \frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{4}x = \frac{10}{3}$ son ejemplos de ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}x = \frac{c}{d}$.

Para resolver estas ecuaciones se multiplica o divide por un mismo número en los dos miembros de la igualdad. Es decir, se aplica la propiedad uniforme de la igualdad. Luego, se realizan las operaciones indicadas. Por ejemplo:

$$\frac{5}{2}x = -\frac{7}{10}$$

Ecuación.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}x = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{10}\right)$$

Se multiplica $\frac{2}{5}$ en ambos miembros de la ecuación.

$$1 \cdot x = -\frac{14}{50}$$

Se resuelve cada producto.

$$x = -\frac{7}{25}$$

Se simplifica.

Por tanto, la solución de $\frac{5}{2}x = -\frac{7}{10}$ es $x = -\frac{7}{25}$.

Ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}x \pm \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

Las ecuaciones $\frac{2}{7}x + \frac{8}{9} = -\frac{7}{5}$ y $\frac{4}{15}x - \frac{11}{8} = \frac{29}{10}$, son ejemplos de ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}x \pm \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$. Para resolver estas ecuaciones se utilizan las propiedades de la igualdad para encontrar el valor de la incógnita. Por ejemplo:

$$-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Ecuación.

$$-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$$

Se suma $\frac{1}{2}$ en ambos miembros de la ecuación.

$$-\frac{4}{5}x + 0 = \frac{6}{10} + \frac{5}{10}$$

Se realiza la suma y se expresa como fracciones homogéneas.

$$-\frac{4}{5}x = \frac{11}{10}$$

Se resuelven las operaciones.

$$\left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}x\right) = \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{11}{10}$$

Se multiplica $\left(-\frac{5}{4}\right)$ en ambos miembros de la ecuación.

$$1 \cdot x = -\frac{55}{40}$$

Se realizan los productos.

$$x = -\frac{11}{8}$$

Se simplifica.

Por tanto, la solución de $-\frac{4}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ es $x = -\frac{11}{8}$.

También se presentan ecuaciones cuyos coeficientes son números decimales.

Por ejemplo, para resolver la ecuación $0,25x - 1 = 0,75$ se sigue:

$$0,25x - 1 = 0,75$$

Ecuación.

$$0,25x - 1 + 1 = 0,75 + 1$$

Se suma 1 en ambos miembros de la ecuación.

$$0,25x + 0 = 1,75$$

Se resuelven las operaciones.

$$0,25x = 1,75$$

Se aplica propiedad del elemento neutro respecto a la adición.

$$\frac{0,25x}{0,25} = \frac{1,75}{0,25}$$

Se divide entre 0,25 en ambos miembros de la ecuación.

$$x = 7$$

Se realizan las operaciones respectivas.

Por tanto, la solución de $0,25x - 1 = 0,75$ es $x = 7$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde. Explica con un ejemplo.

370. ¿Cómo se resuelven las ecuaciones que tienen la forma $\frac{a}{b}x + c = \frac{d}{c}$?

371. ¿Cómo se encuentra la solución para n , en la ecuación $an - \frac{b}{c} = d$, donde a y d , son números racionales decimales?

E Resuelve las siguientes ecuaciones.

372. $\frac{1}{4} + x = \frac{17}{20}$ 375. $\frac{2}{7}x - \frac{9}{4} = \frac{5}{3}$

373. $-\frac{2}{5} = y - \frac{1}{9}$ 376. $-\frac{3}{10} + \frac{x}{2} = 0,5$

374. $-\frac{m}{4} = \frac{3}{8}$ 377. $\frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{15}{8}n + \frac{11}{2}$

I Escribe V (verdadero) o F (falso) y justifica.

378. La solución de la ecuación $x + \frac{5}{4} = -\frac{1}{2}$ es $x = -\frac{7}{4}$. ()

379. La ecuación que representa la mitad de un número igual a $-\frac{2}{5}$ es $\frac{1}{2}x = -\frac{2}{5}$. ()

380. Los $\frac{3}{4}$ de un número igual a $\frac{1}{5}$ se representan por la ecuación $y + \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$. ()

R Resuelve las ecuaciones y completa la tabla con las letras según su valor numérico para encontrar un parque colombiano patrimonio de la humanidad.

381. $I + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$ 387. $L - \frac{7}{2} = \frac{5}{3}$

382. $A + 1,5 = 5,6$ 388. $Q - 3,2 = -4,6$

383. $N + \frac{7}{6} = -\frac{4}{3}$ 389. $R - \frac{1}{3} = \frac{8}{7}$

384. $1,5 \times G = 7,5$ 390. $O - 1,8 = 8,2$

385. $\frac{5}{2} \times S = \frac{5}{3}$ 391. $\frac{7}{3}U = -\frac{21}{6}$

386. $0,3 \times E = 15,3$ 392. $C + 7,1 = 9,5$

P					
	4,1	$\frac{31}{21}$	-1,4	$-\frac{3}{2}$	51

									I		
4,1	$\frac{31}{21}$	-1,4	$-\frac{3}{2}$	51	10	$\frac{31}{6}$	10	5	$\frac{7}{4}$	2,4	10

						T			
$\frac{2}{3}$	4,1	$-\frac{5}{2}$		4,1	5	$-\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{7}{4}$

R Subraya, en cada grupo, la ecuación que no tiene la misma solución que las demás.

393. $\frac{3}{2}m = \frac{5}{7}$; $\frac{1}{35} = \frac{2}{7} + \frac{6}{5}m$; $\frac{8}{3}m = -\frac{12}{21}$

394. $\frac{2}{5}z + \frac{1}{3} = 3$; $z - \frac{11}{6} = \frac{29}{6}$; $-\frac{5}{4}z = 8$

395. $-p + \frac{3}{2} = -\frac{7}{18}$; $\frac{5}{3} - p = \frac{5}{9}$;
 $\frac{3}{4} - p = -\frac{41}{36}$

E Resuelve las siguientes ecuaciones operando directamente con números decimales.

396. $3,5x + 2 = 5,5$ $x =$

397. $2x + 3,5 = 6,2$ $x =$

398. $4x + 6,4 = 11,8$ $x =$

399. $0,1x + 0,6 = 1$ $x =$

400. $2x + 1,5 = 2$ $x =$

401. $5,1x + 3,45 = 6$ $x =$

P Resuelve las siguientes ecuaciones transformando los números decimales en fracciones.

402. $0,2x + 1 = -9$ $x =$

403. $5x - 6,40 = -2,40$ $x =$

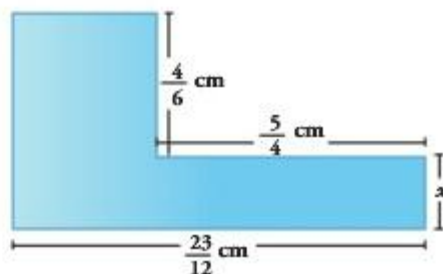
404. $0,3x - 1 = 0,9$ $x =$

405. $0,2 + 0,1x = 1,3$ $x =$

406. $1,4x - 0,2 = 4,13$ $x =$

S Lee, observa y resuelve.

407. Halla la longitud del lado x de la siguiente figura, si se sabe que su perímetro es de 26 cm.



408. Pablo compró un terreno para construir una casa, la cual ocupará $\frac{1}{3}$ de la superficie total. Los restantes 600 m² forman el área abierta. Determina el área total del terreno y de la casa.



5. Planteamiento y solución de problemas



Ampliación
multimedia



Recurso
imprimible

Por medio de las ecuaciones es posible resolver problemas que involucran números racionales. Para ello, hay que tener en cuenta los pasos para la solución de problemas:

- # **Interpretar** el enunciado. Este paso consiste en establecer los datos conocidos del problema e identificar el dato que se busca calcular. Se debe asignar una letra (o incógnita) para el dato desconocido.
- # **Plantear y resolver la ecuación.** En este paso se debe escribir el problema en forma de ecuación. Luego, se resuelve la ecuación.
- # **Comprobar el resultado.** Una vez se resuelva la ecuación se debe verificar si la solución cumple las condiciones del problema. Finalmente, se debe redactar la respuesta en términos de la información del problema.

EJEMPLOS

1. Plantear una ecuación en la situación. Luego, resolver.

Un número disminuido en $\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{8}{9}$.

Se expresa el número como: z .

$$z - \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \quad \text{Se plantea la ecuación.}$$

$$z - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \quad \text{Se suma } \frac{2}{3} \text{ en ambos miembros de la ecuación.}$$

$$z = \frac{8}{9} + \frac{6}{9} = \frac{14}{9} \quad \text{Se realiza la suma.}$$

Por tanto, el número es $\frac{14}{9}$.

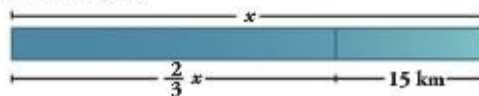
2. Leer y resolver.

En un viaje, el conductor hizo una parada después de viajar $\frac{2}{3}$ del trayecto. Antes de regresar a la carretera, verificó que le quedaban 15 kilómetros para llegar a su destino. ¿Cuál es la longitud del camino?



Se expresa la longitud del camino como: x .

Luego, se representa como sigue:



Ahora, se plantea y se resuelve la ecuación, así:

$$\frac{1}{3}x = 15 \quad \text{Ecuación.}$$

$$3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 15 \quad \text{Se multiplica por 3 en ambos miembros de la ecuación.}$$

$$x = 45 \quad \text{Se resuelven los productos.}$$

Por tanto, la longitud del camino es 45 km.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **S** Soluciono problemas

I Escribe una ecuación para cada enunciado.

409. Un número aumentado en $\frac{3}{5}$ es $\frac{7}{2}$.

410. Un número disminuido en $\frac{2}{3}$ es $\frac{1}{2}$.

411. Un número más $\frac{1}{4}$ es $-\frac{6}{5}$.

412. Un número multiplicado por $\frac{4}{3}$ es $\frac{3}{2}$.

413. La tercera parte de un número es $-\frac{12}{5}$.

A Lee y resuelve. Explica tu respuesta.

En una cancha de tenis, se celebró el partido final de un campeonato importante. Las gradas albergaron un público equivalente a $\frac{3}{5}$ de su capacidad total.



414. Si ese juego tenía un público de 7.200 personas, ¿cuál es la cantidad total de personas que se pueden ubicar en las gradas?

M Plantea una ecuación para cada situación. Luego, resuélvela.

415. La diferencia entre un número y $\frac{85}{4}$ es igual a $-\frac{12}{5}$. ¿Cuál es el número?

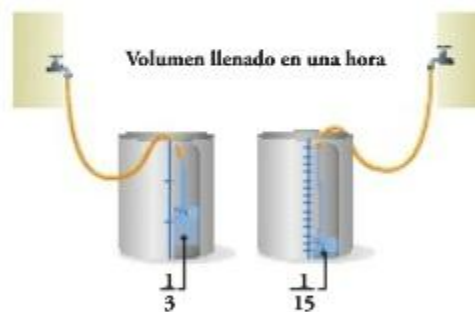
416. Julia reparte $\frac{5}{6}$ del total de tela para la confección de 5 vestidos. ¿Cuánta tela le corresponde a cada vestido?

417. Si el lado de un rectángulo aumenta en $\frac{3}{4}$ m su nueva medida será $\frac{8}{7}$ m, ¿cuál es la longitud inicial del lado del rectángulo?

418. La casa de Susan es $\frac{1}{3}$ más alta que la casa de José, si la casa de Susan mide $5\frac{2}{3}$ m, ¿cuál es la altura de la casa de José?

S Lee, observa y resuelve.

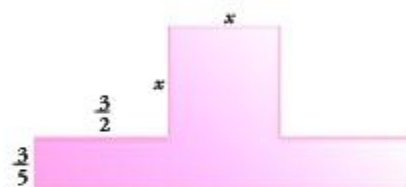
Un grifo llena un barril en tres horas, otro grifo llena otro barril del mismo volumen que el anterior en 15 horas, como se muestra en la figura.



419. Si se abren los grifos en el mismo instante para llenar el mismo barril, ¿cuánto tiempo demora en llenarse?



S 420. Encuentra el área de la siguiente figura, si se sabe que su perímetro es $\frac{43}{6}$.



S Lee y resuelve.

421. En una página de un diario, el 25% fue destinado a fotografías, y se dejó disponible para el texto 420 cm², ¿cuál es el área total de la página?

422. En un campeonato de fútbol, los dos mejores jugadores pertenecen al equipo ganador, los goles anotados por ambos jugadores durante el campeonato suman 32 y el segundo jugador marcó un tercio de los goles del primero. ¿Cuántos goles anotó el mejor jugador?



Conjunto de los números racionales

- Completa el conjunto de fracciones equivalentes a la fracción dada.

423. $\frac{3}{4} : \left\{ \frac{\square}{8}, \frac{-15}{\square}, \frac{\square}{28} \right\}$

424. $\frac{5}{7} : \left\{ \frac{-20}{\square}, \frac{\square}{35}, \frac{40}{\square} \right\}$

425. $-\frac{1}{3} : \left\{ -\frac{\square}{9}, \frac{1}{\square}, \frac{\square}{-81} \right\}$

426. $-\frac{2}{6} : \left\{ \frac{\square}{18}, \frac{-10}{\square}, \frac{\square}{-48} \right\}$

- Expresa como un número decimal cada número racional. Luego, clasifícalos.

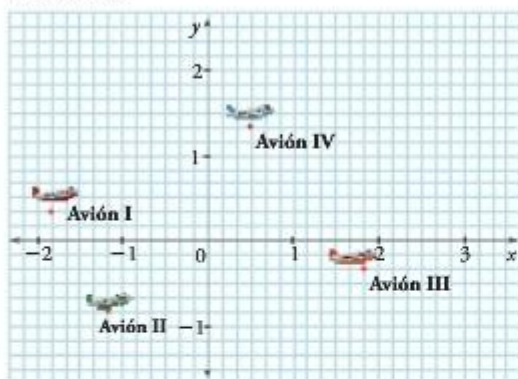
427. $-\frac{10}{3} =$ _____

428. $\frac{120}{150} =$ _____

429. $\frac{15}{6} =$ _____

430. $-\frac{13}{25} =$ _____

- Escribe las coordenadas de los aviones en el plano cartesiano.



431. Avión I: (,) 433. Avión III: (,)

432. Avión II: (,) 434. Avión IV: (,)

- Ordena de mayor a menor las siguientes fracciones.

435. $\frac{11}{21}, -\frac{2}{7}, -\frac{4}{15}, \frac{7}{9}$

436. $-\frac{13}{7}, \frac{9}{5}, -\frac{2}{49}, -\frac{16}{21}$

- Escribe un número para que cada relación sea verdadera.

437. $-\frac{2}{7} < -\frac{5}{\square}$

439. $\frac{3}{\square} < -\frac{5}{21}$

438. $\frac{4}{11} > \frac{\square}{5}$

440. $\frac{56}{63} > \frac{8}{\square}$

Operaciones en los números racionales

- Resuelve las siguientes operaciones.

441. $\left(-\frac{11}{2}\right) + \frac{12}{15} =$ _____

442. $\left(-\frac{31}{12}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) =$ _____

443. $\frac{8}{5} + \frac{3}{2} + \left(-\frac{7}{15}\right) =$ _____

444. $-\frac{3}{4} + \frac{7}{9} - \frac{19}{18} =$ _____

445. $-\frac{11}{8} - \frac{5}{2} - \frac{7}{4} =$ _____

446. $\frac{4}{21} + \left(-\frac{3}{7}\right) + \frac{5}{14} =$ _____

- Completa las multiplicaciones.

447.

$$\begin{array}{r} 342 \\ \times 8\square5 \\ \hline 1\square10 \\ \square42 \\ 2\square3\square \\ \hline \square7\square,7\square0 \end{array}$$

448.

$$\begin{array}{r} 1921 \\ \times 0,1\square \\ \hline 11526 \\ \square\square\square\square \\ 0\square\square\square \\ \hline \square3,\square7\square6 \end{array}$$

- Simplifica los factores. Luego, calcula cada producto.

449. $\left(\frac{4}{9}\right)\left(-\frac{15}{25}\right)\left(\frac{12}{36}\right)$

450. $\left(-\frac{3}{9}\right)\left(-\frac{5}{15}\right)\left(\frac{8}{24}\right)\left(\frac{3}{6}\right)$

Halla la potencia indicada.

451. $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$

452. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$

Simplifica las siguientes expresiones.

453. $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{25}\right] \div \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{73}\right]$

454. $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 \div \left(\frac{4}{3}\right)^{53}\right] \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$

455. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{43} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{12}\right]^2$

Simplifica cada expresión utilizando las propiedades de la radicación y la potenciación.

456. $\frac{\left(\sqrt{\frac{4}{25}}\right)^2 \left(\sqrt[3]{\frac{5}{9}}\right)^3}{\sqrt{\frac{25}{81}}}$

457. $\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}}\right)^4}{\sqrt[4]{\frac{16}{81}} \left(\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}\right)}$

Escribe un número en cada cuadrado para que se cumpla la igualdad.

458. $\sqrt{\frac{\square}{25}} = \frac{4}{5}$

459. $\sqrt[3]{\frac{\square}{\square}} = \frac{5}{2}$

Polinomios aritméticos con racionales

Resuelve cada polinomio aritmético.

460. $\frac{5}{8} - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3}$

461. $-\frac{2}{5} \div -\frac{8}{15} - \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{7}{3}$

462. $\frac{5}{8} - \left\{\frac{1}{3} \times \left[\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$

463. $3\frac{3}{4} \times \left\{5 - \left[\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{5}{14}\right]\right\}$

464. $9,8 - \{[(4,2 - 1,5) + (1 - 0,8)]^2 - 1\}$

465. $\sqrt{2,25} - [(0,08)^2 + 5(0,3 - 27)]$

Ecuaciones con números racionales

Resuelve las siguientes ecuaciones.

466. $x - \frac{1}{7} = \frac{2}{5}$

467. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$



PROBLEMAS PARA REPASAR

En un *rally* automovilístico dos puntos de control están a 160 km de distancia entre sí. Los pilotos deben conducir de un puesto de control a otro en exactamente 2,5 horas para ganar el máximo de puntos. Al inicio del recorrido un conductor se demoró 1 hora en viajar a través de un terreno montañoso de 40 km.

¿Cuál debería ser la velocidad promedio, en kilómetros por hora, para los 120 km que faltan, si el tiempo total entre los sitios de control debe ser 2,5 horas?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál debería ser la velocidad promedio, en kilómetros por hora, para los 120 km que faltan, si el tiempo total entre los puntos de control debe ser 2,5 horas?

¿Cuáles son los datos del problema?

En un *rally* automovilístico dos puntos de control están a 160 km de distancia entre sí.

Los pilotos deben conducir de un punto de control a otro en exactamente 2,5 horas para ganar el máximo de puntos.

Al inicio del recorrido un conductor demoró 1 hora en viajar a través de un terreno montañoso de 40 km.

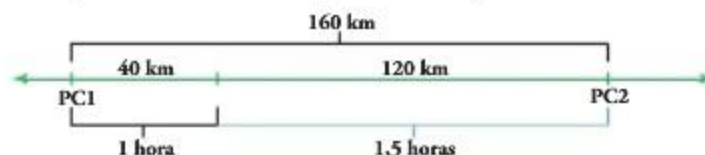
Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, la distancia total entre los puntos de control es 160 km. Se asignan las siglas PC1 para el puesto de control 1 y PC2 para el punto de control 2. El tiempo para recorrer la distancia entre los puntos de control es 2,5 h.

Segundo, si el conductor gastó 1 hora en recorrer 40 km, entonces le quedan por recorrer 120 km, ya que, $160 - 40 = 120$.

El tiempo que le queda para recorrer la distancia faltante corresponde a 1,5 h, ya que, $2,5 - 1 = 1,5$.

Después, se representan gráficamente estos datos para resolver el problema.



Luego, para recorrer los 120 km que le quedan tiene 1,5 h, por lo que la velocidad promedio para este tramo es 80 km/h, ya que,

$$\begin{array}{lcl} \text{distancia} & \longrightarrow & 120 \\ \text{tiempo} & \longrightarrow & 1,5 \end{array} = 80$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Una vez se ha verificado que las operaciones están correctamente realizadas, se puede concluir que para recorrer los 120 km de distancia en 1,5 horas, el conductor deberá viajar a 80 km/h.



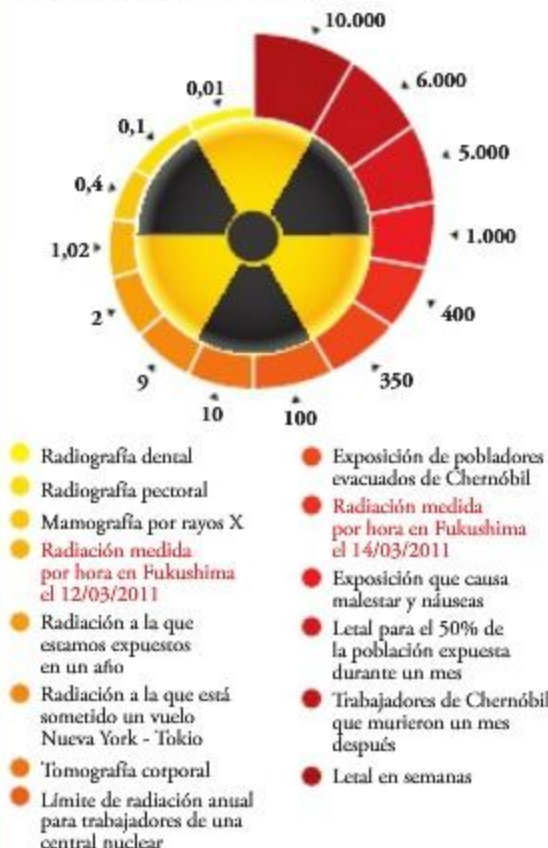
...Para representar la radiación absorbida por un cuerpo.

La radiación es energía que se propaga por el medio gracias a ondas electromagnéticas que no son visibles para el ser humano. A diario estamos expuestos a la radiación de los diferentes aparatos eléctricos que utilizamos.

La unidad de medida de la absorción de radiación por un cuerpo es el *sievert*, en honor al físico Rolf Sievert, gracias a su contribución en los efectos biológicos producidos por la radiación ionizante.

En pequeñas cantidades la radiación que absorbe un cuerpo no tiene ningún efecto notable pero en condiciones extremas, como la de la central nuclear de Fukushima en el año 2011, puede causar hasta la muerte por su alta exposición radiactiva.

En el siguiente diagrama se muestra la cantidad de radiación absorbida medida en milisievert (1 Sv = 1.000 mSv) para diferentes situaciones.



En la figura, se observa que las cantidades bajas son representadas por medio de decimales y para las grandes cantidades se utilizan los números enteros hasta el 10.000.

Las medidas que se encuentran en rojo, hacen referencia a la radiación medida durante una hora en Fukushima los días 12 y 14 de marzo del año 2011. En este caso la medida en milisievert se incrementó rápidamente entre los dos días.

El incremento se calcula, realizando la diferencia entre los dos valores medidos.

$$400 - 1,02 = 398,98 \text{ mSv}$$

Una niña de primaria de la ciudad de Fukushima estuvo expuesta a un alto nivel de radiación durante un mes, junto con sus tres hermanos, quienes también han sido expuestos a 1,4 y hasta 1,6 milisieverts de radiación en el mismo mes.

Como se puede observar, este valor de radiación se puede representar en diferente forma o en diferente unidad de medida.

1. ¿Por qué crees indispensable medir la radiación que absorbe el cuerpo?
2. Expresa, en forma de una fracción decimal, la medida en sievert de la diferencia de radiación mostrada en Fukushima.
3. Representa todas las cantidades decimales de la lectura en forma de fracción.
4. Encuentra la diferencia de radiación absorbida entre las siguientes situaciones.
 - a. Radiografía pectoral y mamografía por rayos X.
 - b. Radiación a la cual estamos expuestos durante un año y radiografía dental.
 - c. Exposición de los pobladores de Chernóbil y la radiación medida en una hora en Fukushima el 12 de marzo del 2011.

Trabaja con Graph

Objetivo: representar gráficamente puntos en el plano cartesiano, donde sus componentes son números racionales.

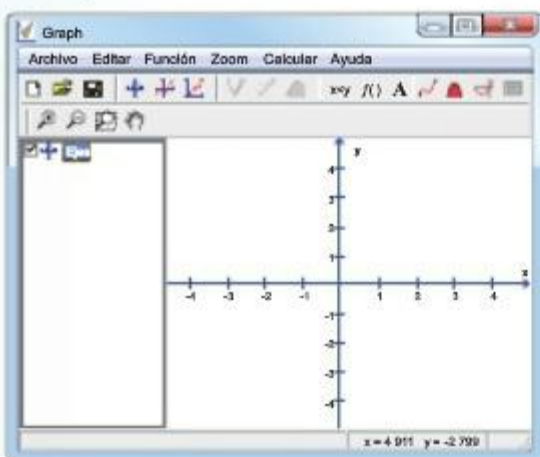
Descripción: representar gráficamente los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, $(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$, $(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3})$, $(-\frac{5}{4}, \frac{2}{3})$ en el plano cartesiano, en el programa Graph.

Para acceder a Graph ingresa y descarga el programa en: www.padowan.dk/graph

1 Haz clic en **Graph**.

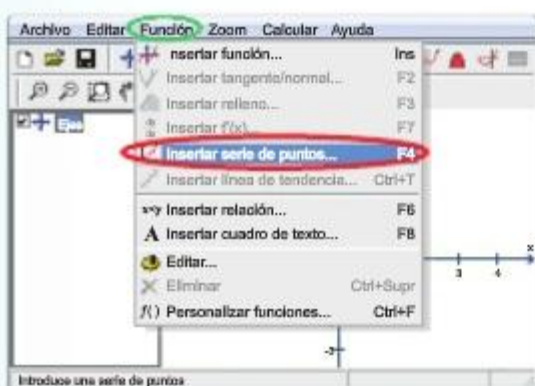
2 Observa la ventana que se despliega.

Luego, identifica las herramientas y la región del plano cartesiano.

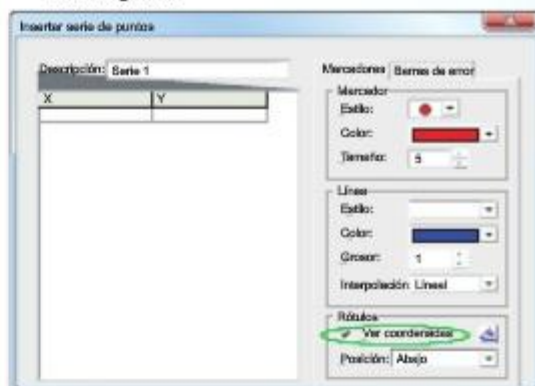


3 Observa el menú. Luego, selecciona **Función**, en la barra de herramientas.

Después, en la ventana que se despliega, haz clic en **Insertar serie de puntos**, como se muestra en la siguiente figura.



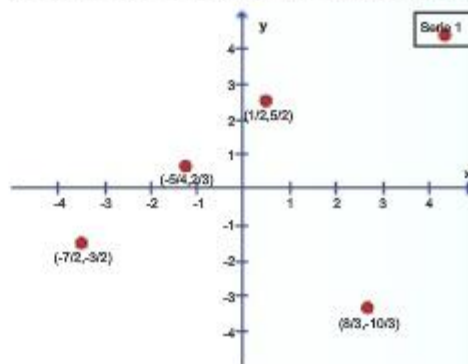
4 Observa la ventana que se despliega. Luego, haz clic en **Ver coordenadas**, como se muestra en la figura.



5 Introduce las coordenadas de los puntos $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$, $(-\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$, $(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3})$, $(-\frac{5}{4}, \frac{2}{3})$ en las respectivas columnas X y Y. Luego, haz clic en **Aceptar**.



6 Observa la ventana que se despliega con los puntos ubicados en el sistema cartesiano.



3

Proporcionalidad

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer cuándo dos razones forman una proporción.
- Identificar si la **relación entre dos magnitudes es directa o inversamente proporcional**.
- Representar gráficamente **magnitudes directa e inversamente proporcionales**.
- Aplicar la **regla de tres** en la resolución de problemas.

Encuentra en tu Libromedia

✓ Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

- | | |
|---|--|
|  3 Multimedia |  1 Audio |
|  1 Galería |  5 Imprimibles |
|  12 Actividades |  2 Enlaces web |

Lo que sabes...

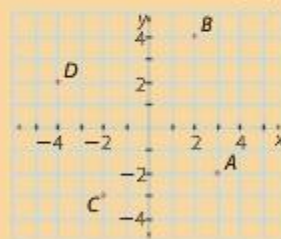
1. Simplificar las siguientes expresiones.

a. $\frac{128}{36}$ b. $\frac{300 \times 15}{150}$ c. $\frac{900 \times 6}{45}$

2. Despejar y en las siguientes ecuaciones.

a. $5y = 20$ b. $\frac{1}{3}y = 12$ c. $\frac{4}{y} = 16$

3. Escribir las coordenadas de A, B, C y D.



4. Expresar como fracción decimal los siguientes números.

a. 1,5 b. 2,8 c. 30,75 d. 123,084



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para encontrar relaciones entre las medidas corporales.

La antropometría es una rama de la antropología biológica que se encarga de estudiar las medidas del cuerpo humano y las relaciones que existen entre ellas. Estas medidas pueden variar dependiendo de la raza, el sexo, la alimentación, entre otros. Las medidas antropométricas estándar no pueden ser constantes, es necesario modificarlas con el pasar del tiempo debido al cambio morfológico que ha tenido el cuerpo humano a través de la historia, entonces, se hace necesario realizar estudios continuamente al respecto.

■ Lee más acerca de este tema en la página 152.

Cronología de la proporcionalidad

Egipto. En el papiro de Rhind se evidenció el uso de repartos proporcionales para entregar víveres a las personas que vivían en los templos.



Grecia. Teano, esposa de Pitágoras, propuso ocho formas distintas de representar una proporción. Además, escribió sobre la proporción áurea.

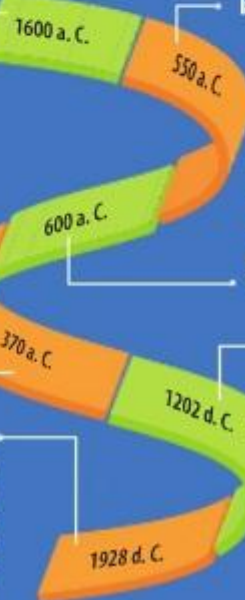


Grecia. Eudoxio de Cnidos desarrolló la teoría de la proporción utilizando cantidades continuas.



Grecia. Tales de Mileto utilizó las proporciones para calcular la altura de las pirámides de Egipto.

Holanda. En los juegos olímpicos de Ámsterdam se inició la investigación de antropometría en los deportistas de alto nivel aplicando los conceptos de proporcionalidad.



Italia. Leonardo de Pisa, Fibonacci, escribió su libro *Liber Abaci* donde trató problemas de regla de tres.





Historia de las matemáticas

La escuela pitagórica y las razones



En la escuela pitagórica, fundada por el matemático Pitágoras, se consideraba que todo conocimiento se basa en la concepción de número. En especial los pitagóricos aplicaron las razones de números enteros para representar los intervalos entre notas musicales.



Recurso imprimible

1. Razones y proporciones

Las razones y proporciones se aplican en diversas áreas como arte, arquitectura, cartografía, medicina, culinaria, entre otras. Por ejemplo, en cartografía se utilizan las razones para relacionar las dimensiones reales con las dimensiones del plano o mapa que las representa.

1.1 Razones



Ampliación multimedia

La **razón** entre dos cantidades a y b con $b \neq 0$, es el cociente indicado entre dichas cantidades. Se simboliza $\frac{a}{b}$ o $a:b$ y se lee a es a b .

En una razón $\frac{a}{b}$, a es el **antecedente** y b es el **consecuente**.

Una razón puede presentar la relación entre dos cantidades de una misma magnitud o la relación entre dos cantidades de diferentes magnitudes. En este último caso, la razón tiene una unidad de medida.

Por ejemplo, si se establece la razón $\frac{d}{t}$ con $t \neq 0$, en donde d representa la distancia recorrida por un móvil en un tiempo t , entonces la unidad de medida puede ser kilómetros por hora, metros por segundo, entre otros.

EJEMPLOS

1. Escribir la expresión 5 es a 18 como una razón. Luego, identificar el antecedente y el consecuente.

La razón correspondiente se puede escribir $\frac{5}{18}$ o 5:18. En esta razón 5 es el antecedente y 18 el consecuente.

2. El ganador de la Copa Mundial de Fútbol de 2010 fue España, quien de 7, partidos jugados ganó 6 y perdió 1. ¿Cuál es la razón entre el número de partidos ganados y el número de partidos jugados?



En este caso el antecedente es 6, que corresponde al número de partidos ganados y el consecuente es 7, que es el número de partidos jugados. Por tanto, la razón es $\frac{6}{7}$.

3. En una excursión hay tres campamentos: A, B y C. En el campamento A hay 5 personas, en el campamento B hay 7 personas y en el C hay 8 personas. ¿Cuál es la razón entre la cantidad total de personas y la cantidad de personas que hay en los campamentos A y B?

Primero, se tiene que la cantidad de personas que hay en los campamentos A y B es 12, y la cantidad total de personas es 20.

Luego, la razón correspondiente es:

$$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

Por tanto, la razón entre la cantidad total de personas que hay en la excursión y la cantidad de personas de los campamentos A y B es $\frac{5}{3}$.



Series de razones iguales

Una **serie de razones iguales** es la igualdad entre dos o más razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \dots$$

Por ejemplo, las razones $\frac{10}{6}$ y $\frac{15}{9}$ forman una serie de razones iguales porque al simplificarlas resulta la razón $\frac{5}{3}$. Por tanto, se tiene que:

$$\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} \dots$$

Propiedad fundamental de las series de razones iguales

En toda serie de razones iguales, cada razón es igual a la razón entre la suma de los antecedentes y la suma de los consecuentes, así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

EJEMPLOS

1. Hallar los valores de a y b , si $\frac{a}{3} = \frac{b}{12}$ y $a + b = 10$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{12}$$

Se plantea la serie de razones iguales.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{12} = \frac{a+b}{3+12}$$

Se aplica la propiedad fundamental de las series de razones iguales.

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{12} = \frac{10}{15}$$

Se reemplaza $a + b$ y se efectúa la suma.

$$\frac{a}{3} = \frac{10}{15}$$

Se establece la igualdad entre dos razones.

$$a = \frac{30}{15}$$

Se despeja a .

$$a = 2$$

Se efectúa la división.

Como $a + b = 10$ y $a = 2$, entonces, $2 + b = 10$, de donde $b = 8$.

2. Completar la siguiente serie de razones iguales.

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{\square} = \frac{\square}{30}$$

Para completar la serie se deben determinar los números por los cuales se complicó $\frac{3}{5}$ para generar las razones $\frac{9}{\square}$ y $\frac{\square}{30}$. Luego, se tiene que:

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\times 3} \frac{9}{15} \xrightarrow{\times 2} \frac{18}{30}$$

Por tanto, los números que completan la serie de razones iguales son 15 y 18.

Matemáticamente

Si un automóvil recorre 15 kilómetros en media hora, escribe una serie de razones iguales que represente su rapidez constante.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

I Determina una razón para cada una de las siguientes situaciones.

- Doce de cada catorce estudiantes son deportistas.
- Un equipo de fútbol ha ganado 4 de cada 5 partidos jugados.
- Ocho de cada diez personas botan la basura en la caneca correspondiente.
- Siete de cada diez casas de un pueblo tienen servicios públicos.

E Escribe cada expresión como una razón.

- 6 es a 13
- $3\frac{1}{4}$ es a $\frac{2}{7}$
- 2 es a $\frac{3}{5}$
- 0,7 es a 8,4

R Responde.

- El largo de una cancha de fútbol es 120 m y el ancho es de 90 m. ¿Cuál es la razón entre el ancho y el largo?
- En un colegio hay 600 niñas y 450 niños, ¿cuál es la razón entre el número de niños y la cantidad total de estudiantes?
- En un zoológico hay 275 especies de animales de las cuales 30 son conejos. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de especies de conejos y la cantidad total de especies de animales?

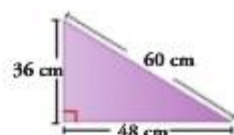
E Escribe una serie de razones iguales con cada una de las razones dadas.

- $\frac{3}{4}$
- $\frac{0,5}{3}$
- $\frac{10}{0,25}$
- $\frac{6}{5}$
- $\frac{5}{4,2}$
- $\frac{8,5}{6,2}$

R Halla los términos desconocidos en cada una de las razones dadas.

- $\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = \frac{x}{15} = \frac{30}{z}$
- $\frac{4}{7} = \frac{8}{14} = \frac{20}{y} = \frac{w}{42}$
- $\frac{0,7}{2} = \frac{c}{10} = \frac{4,2}{12} = \frac{d}{36}$
- $\frac{1}{9} = \frac{a}{45} = \frac{6}{b} = \frac{c}{108}$

I Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo interno cuya medida es de 90° , como se muestra en la siguiente figura.



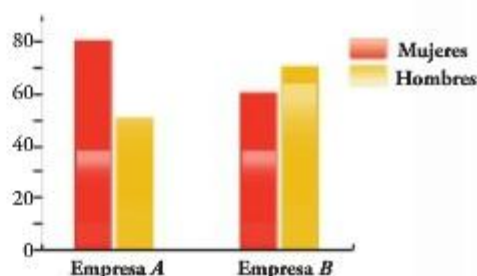
Si en un triángulo rectángulo, la hipotenusa es el lado opuesto del ángulo de 90° y los lados que forman este ángulo se denominan catetos, responde las siguientes preguntas y justifica tus respuestas.

- ¿Cuáles son las razones entre la medida de la hipotenusa y la medida de cada cateto?
- ¿Cuál es la razón entre la medida del cateto de mayor longitud y la medida del cateto de menor longitud?

S Resuelve.

- La razón entre la masa de un papel y el área de su superficie se denomina gramaje. Determina el gramaje de un papel de 50 g de masa y 20 cm^2 de superficie.

S En el siguiente diagrama de barras se muestra la cantidad de hombres y mujeres que hay en dos empresas.



- ¿Cuál es la razón de hombres a mujeres en la empresa A?
- ¿Cuál es la razón de mujeres a hombres en la empresa B?
- ¿Cuál es la razón de las mujeres al total de personas de la empresa A?
- ¿Cuál es la razón entre la cantidad total de personas de la empresa A y la cantidad total de personas de la empresa B?



1.2 Proporción

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Así, la proporción entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se escribe $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ o $a:b::c:d$ y se lee “a es a b como c es a d”.

En la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los términos a y d se denominan **extremos** y los términos b y c se denominan **medios**.

Por ejemplo, la proporción $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ se lee “tres es a cinco como doce es a veinte”. Además, en esta proporción 3 y 20 son los extremos y 5 y 12 son los medios.

Clases de proporciones

Las proporciones pueden ser continuas o discretas.

- Si los medios o los extremos en una proporción son iguales, la proporción es **continua**. El término que se repite en una proporción continua se denomina **media proporcional** de los otros términos.
- Si todos los términos de una proporción son diferentes, la proporción es discreta. En una proporción discreta, cada término es la **cuarta proporcional** de los otros tres términos.

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ con } b, d \neq 0, \text{ entonces, } a \times d = b \times c.$$

Por ejemplo, en la proporción $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ se cumple que $2 \times 9 = 6 \times 3$.

EJEMPLOS

1. Verificar si las razones $\frac{2,5}{3}$ y $\frac{7,5}{9}$ forman una proporción.

Como $2,5 \times 9 = 22,5$ y $3 \times 7,5 = 22,5$, entonces, con las razones se puede establecer la proporción $\frac{2,5}{3} = \frac{7,5}{9}$.

2. Escribir una proporción usando los números 4, 20, 35 y 7.

Primero, se calculan todos los posibles productos entre los números dados y se determinan cuáles son iguales.

$$4 \times 20 = 80$$

$$20 \times 35 = 700$$

$$35 \times 7 = 245$$

$$4 \times 35 = 140$$

$$20 \times 7 = 140$$

$$4 \times 7 = 28$$

Luego, se cumple que $4 \times 35 = 20 \times 7 = 140$. Así, el producto de extremos puede ser 4×35 y el de medios 20×7 .

Finalmente, se escribe la proporción correspondiente, así:

$$\frac{4}{20} = \frac{7}{35}$$

Historia de las matemáticas

Eudoxio y las proporciones



Eudoxio (390-337 a. C.) fue un matemático y astrónomo griego, quien hizo importantes aportes a la teoría de proporciones: definió proporción y planteó su aplicación a otras ciencias.



Matemáticamente

Calcula la cuarta proporción de 5, 3,5 y 8

3. Hallar el valor de y en la proporción $\frac{6}{10} = \frac{30}{y}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$6 \times y = 10 \times 30 \quad \text{Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$6 \times y = 300 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$y = \frac{300}{6} \quad \text{Se divide entre 6.}$$

$$y = 50 \quad \text{Se simplifica.}$$

Por tanto, el valor de y es 50.

4. Calcular la media proporcional en la proporción $\frac{2}{m} = \frac{m}{32}$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$2 \times 32 = m \times m \quad \text{Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$64 = m^2 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$m = -8 \text{ o } m = 8 \quad \text{Se extrae raíz cuadrada.}$$

Por tanto, la media proporcional de $\frac{2}{m} = \frac{m}{32}$ puede ser 8 o -8.

5. Determinar si las razones que se plantean en las siguientes situaciones forman una proporción.

- a. Una persona recorrió 3 kilómetros en una hora y otra persona recorrió 7 kilómetros en 2 horas.

Las razones que se plantean en la situación son $\frac{3}{1}$ y $\frac{7}{2}$.

Como $3 \times 2 \neq 7 \times 1$, entonces, las razones no cumplen la propiedad fundamental de las proporciones y, por tanto, no forman una proporción.

- b. En un colegio hay 2 hombres por cada 3 mujeres y en otro colegio hay 8 hombres por cada 12 mujeres.

Las razones que se establecen en la situación son: $\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$.

Como $2 \times 12 = 8 \times 3 = 24$, entonces las razones cumplen la propiedad fundamental de las proporciones y, por tanto, forman una proporción.

6. Una bebida contiene 70 mg de sodio por cada 250 mL, ¿cuántos miligramos de sodio hay en una botella de 450 mL de esta bebida?

Primero, se establece la siguiente proporción.

$$\frac{70 \text{ mg}}{250 \text{ mL}} = \frac{x}{450 \text{ mL}}$$

Luego, se realizan los siguientes pasos.

$$70 \times 450 = 250 \times x \quad \text{Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$\frac{70 \times 450}{250} = x \quad \text{Se divide entre 250.}$$

$$126 = x \quad \text{Se efectúan las operaciones.}$$

Finalmente, una botella de 450 mL de esta bebida contiene 126 mg de sodio.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

I Responde.

29. En la proporción $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, ¿cuáles son los extremos y cuáles son los medios?

30. ¿En qué se diferencia una proporción continua y una proporción discreta?

31. ¿Qué es la media proporcional?

E Escribe si la proporción es continua o discreta. Justifica tu respuesta.

32. $\frac{2}{1} = \frac{0,2}{0,02}$ 34. $\frac{4}{10} = \frac{100}{250}$

33. $\frac{1,25}{0,25} = \frac{6,25}{1\frac{1}{4}}$ 35. $\frac{9}{10} = \frac{4,5}{5}$

R Determina cuáles de los siguientes pares de razones forman una proporción.

36. $\frac{4}{9}$ y $\frac{16}{36}$ 39. $\frac{11}{12}$ y $\frac{3}{2}$

37. $\frac{-5}{35}$ y $\frac{1}{7}$ 40. $\frac{-0,2}{6}$ y $\frac{3}{-90}$

38. $\frac{3\frac{1}{2}}{7}$ y $\frac{2}{4}$ 41. $\frac{-3}{-1}$ y $\frac{0,25}{-1}$

E Halla el valor de x en cada proporción.

42. $-\frac{2}{12} = -\frac{x}{48}$ 45. $\frac{-9}{\frac{1}{8}} = \frac{36}{x}$

43. $\frac{x}{3} = \frac{5}{225}$ 46. $\frac{6}{x+1} = \frac{5}{40}$

44. $\frac{2\frac{1}{4}}{x} = \frac{9}{24}$ 47. $\frac{-0,4}{x-1} = \frac{10}{4,5}$

E Calcula la media proporcional en cada caso.

48. $\frac{36}{x} = \frac{x}{4}$ 51. $\frac{-3,5}{b} = \frac{b}{-14}$

49. $\frac{8}{y} = \frac{y}{72}$ 52. $\frac{2,2}{m} = \frac{m}{\frac{845}{11}}$

50. $\frac{a}{5} = \frac{80}{a}$ 53. $\frac{n}{\frac{1}{2}} = \frac{4,5}{n}$

E Escribe cuatro proporciones diferentes a partir de cada igualdad.

54. $4 \times 9 = 12 \times 3$ 55. $-9 \times 6 = -13,5 \times 4$

R Determina si las razones entre las magnitudes de cada tabla forman una proporción.

56.

Cantidad de paquetes	2	5
Cantidad de galletas	8	20

57.

Distancia (km)	55	165
Tiempo (h)	1	3

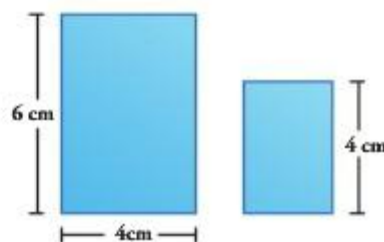
58.

Cantidad de jabones	1	3
Precio (\$)	2.000	4.800

S Aplica la propiedad fundamental de las proporciones para resolver cada problema.

59. Con 120 g de harina se preparan 6 galletas. ¿Cuántos gramos de harina se necesitan para preparar 34 galletas?

60. La relación entre las bases de los siguientes rectángulos es de 4 a 1. Si la razón entre sus perímetros es 2, ¿cuál es el área del rectángulo menor?



61. Cierta año, uno de cada cuatro estudiantes obtuvo su título profesional. Si ese año hubo una población universitaria de 350.000 estudiantes, ¿cuántos obtuvieron su título profesional?



62. En un laboratorio se tienen 560 mL de una sustancia y en ella se encuentran 56 g de mercurio, ¿cuántos gramos de mercurio habrá en 1.080 mL de esta sustancia?



Historia de las matemáticas

Teano



Teano fue una matemática griega, esposa de Pitágoras quien propuso ocho formas de expresar una proporción, planteó la propiedad fundamental de las proporciones y escribió sobre la proporción áurea, la cual se aplica en arte, arquitectura, entre otras.



Recurso imprimible

Propiedades de las proporciones



Actividad

Además de la propiedad fundamental de las proporciones, en una proporción se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades

- | | |
|--|---|
| 1. Los medios o los extremos se pueden intercambiar y el resultado sigue siendo una proporción. | Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ y $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ |
| 2. La suma o la resta de los antecedentes es a la suma o a la resta de los consecuentes, como cada antecedente es a su consecuente. | Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ |
| 3. La suma o la resta de los términos de la primera razón es al primer consecuente como la suma o la resta de los términos de la segunda razón es al segundo consecuente. | Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$ |
| 4. La suma de los términos de la primera razón es a la diferencia de los términos de la primera razón como la suma de los términos de la segunda razón es a la diferencia de los términos de la segunda razón. | Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces, $\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d}$ |

EJEMPLOS

1. Calcular el valor de x y de y en la proporción $\frac{x}{y} = \frac{21}{15}$, teniendo en cuenta que $x + y = 12$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{x}{y} = \frac{21}{15} \quad \text{Proporción.}$$

$$\frac{x + y}{y} = \frac{21 + 15}{15} \quad \text{Se aplica la tercera propiedad de las proporciones.}$$

$$\frac{12}{y} = \frac{21 + 15}{15} \quad \text{Se reemplaza el valor de } x + y.$$

$$\frac{12}{y} = \frac{36}{15} \quad \text{Se efectúa la suma.}$$

$$y = \frac{12 \times 15}{36}$$

$$y = 5$$

Así, $y = 5$ y como $x + y = 12$, entonces $x = 7$.



2. Determinar la razón de $a + b$ a $a - b$ si $\frac{a}{b} = \frac{8}{24}$.

Se debe hallar $\frac{a+b}{a-b}$, para ello es necesario realizar los siguientes pasos:

$$\frac{a}{b} = \frac{8}{24} \quad \text{Proporción.}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{8+24}{8-24} \quad \text{Se aplica la propiedad 4 de las proporciones.}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{32}{-16} \quad \text{Se efectúan las operaciones.}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = -2 \quad \text{Se divide.}$$

Por tanto, la razón de $a + b$ a $a - b$ es igual a -2 .

3. Hallar el valor de x y de y que hacen verdaderas las igualdades

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} \text{ y } x + y = 21.$$

Primero, se aplica la propiedad 2 en la proporción $\frac{x}{2} = \frac{y}{5}$.

$$\text{Así se tiene que } \frac{x+y}{7} = \frac{y}{5}.$$

Luego, se reemplaza $x + y$, de donde se obtiene $\frac{21}{7} = \frac{y}{5}$.

Finalmente, se despeja y , con la cual $y = 15$.

Como $x + y = 21$, entonces, $x = 6$.

4. La razón entre la masa corporal de Luis y de Daniel es $\frac{2}{3}$. Si se suman las masas de ambos se obtienen 90 kilogramos. ¿Cuál es la masa corporal de Daniel?

Si L es la masa corporal de Luis y D la masa corporal de Daniel, entonces se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{L}{D} = \frac{2}{3} \quad \text{Se plantea la proporción.}$$

$$\frac{L+D}{D} = \frac{2+3}{3} \quad \text{Se aplica la propiedad 3 de las proporciones.}$$

$$\frac{90}{D} = \frac{2+3}{3} \quad \text{Se reemplaza la suma de las masas corporales.}$$

$$\frac{90}{D} = \frac{5}{3} \quad \text{Se realizan las operaciones.}$$

$$D = 54 \quad \text{Se despeja } D.$$

Por tanto, la masa corporal de Daniel es 54 kilogramos.



Matemáticamente

Calcula el valor de x y el valor de y en la proporción

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

Teniendo en cuenta que $x + y = 28$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** Determina cuáles de los siguiente enunciados son propiedades de las proporciones.

63. Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, entonces, $\frac{m+q}{n+p} = \frac{p}{q}$.

64. Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, entonces, $\frac{m-n}{n} = \frac{p-q}{q}$.

65. Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, entonces, $\frac{m-p}{q} = \frac{n-q}{p}$.

66. Si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, entonces, $\frac{m+p}{n+q} = \frac{p}{q}$.

- A** Explica cómo hallar el valor de x aplicando la propiedad 1 de las proporciones.

67. $\frac{x}{5} = \frac{8}{20}$

69. $\frac{7}{8} = \frac{14}{x}$

68. $\frac{8}{x} = \frac{24}{15}$

70. $\frac{8}{32} = \frac{x}{4}$

- R** Resuelve aplicando las propiedades de las proporciones.

71. Calcula a si $\frac{a}{b} = \frac{5}{20}$ y $a - b = -3$.

72. Calcula b si $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ y $a + b = 15$.

- R** Completa cada proporción si $\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$.

73. $\frac{21 + \square}{12} = \frac{7 + \square}{4}$

74. $\frac{21 + 12}{\square} = \frac{7 + \square}{7}$

75. $\frac{21 - 7}{12 - \square} = \frac{21 + \square}{12 + \square}$

76. $\frac{21 - \square}{21} = \frac{7 - \square}{7}$

- P** Completa el enunciado. Luego, responde.

77. La razón entre dos números es _____.
Si la suma de los dos números es _____,
¿cuáles son los números?

78. La razón entre dos números es _____.
Si la diferencia entre el número mayor y el número menor es _____, ¿cuáles son los números?

- R** Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones con varias incógnitas. Para resolver un sistema de ecuaciones se deben hallar los valores de las incógnitas que satisfacen las ecuaciones. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando las propiedades de las proporciones.

79. $\begin{cases} x - y = 35 \\ \frac{x}{9} = \frac{y}{2} \end{cases}$

80. $\begin{cases} \frac{x}{2,5} = \frac{y}{5} \\ x + y = 6 \end{cases}$

- S** Resuelve los siguientes problemas.

81. La suma de las edades de dos hermanas es 60 años. Si la razón entre sus edades es de 5 a 7, ¿cuántos años tiene la hermana menor?

82. En un salón la razón entre la cantidad de estudiantes zurdos y la cantidad de estudiantes diestros es de 1 a 7. Si en total hay 24 estudiantes, ¿cuántos estudiantes son diestros?

83. Francisco tiene \$250.000 ahorrados. Si los ahorros de Francisco y de Juliana están en relación de 5 a 3, ¿cuánto dinero tiene ahorrado Juliana?



84. Gabriela quiere embaldosar el piso de su sala. Para esto, debe utilizar 8 baldosas negras por cada 4 baldosas blancas. Si el piso tiene un área de 36 metros cuadrados y cada baldosa tiene un metro cuadrado, ¿cuántas baldosas de cada color requiere Gabriela?

85. Los lados b y a de los pentágonos regulares de la siguiente figura están en relación 2 a 5.



Pentágono regular

Si la suma de los perímetros de ambos pentágonos es igual a 70 cm, ¿cuál es la medida del lado de cada pentágono?



2. Proporcionalidad directa



Actividades

En muchas situaciones cotidianas y en fenómenos que ocurren en otras áreas, se relacionan dos o más magnitudes de tal forma que una depende de la otra. Por ejemplo, el costo de producción depende de la cantidad de artículos que se produzcan y la distancia que recorre un móvil depende del tiempo.

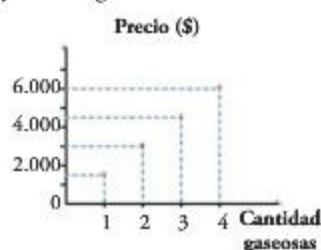
Una **magnitud** es una cualidad de un objeto a la cual se le puede asignar una medida.

Por tanto, la distancia, la masa, el tiempo, entre otras, son magnitudes.

Para representar la relación de dependencia entre dos magnitudes se utiliza la tabla de datos y la representación gráfica.

Por ejemplo, la relación entre la cantidad de gaseosas y el precio en pesos que se debe pagar por ellas, se puede representar en una tabla y en una gráfica así:

Cantidad de gaseosas	Precio \$
1	1.500
2	3.000
3	4.500
4	6.000



2.1 Magnitudes directamente correlacionadas

Dos magnitudes están **directamente correlacionadas** si están relacionadas y al aumentar una de ellas la otra también aumenta o, al disminuir una de ellas, la otra también disminuye.

Por ejemplo, la medida del lado de un cuadrado y su área están directamente correlacionadas, porque al aumentar la medida del lado aumenta el área y al disminuir la medida del lado el área disminuye.

2.2 Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes están **directamente proporcionales**, cuando al comparar las medidas que se corresponden entre dichas magnitudes se obtiene una razón constante, la cual se denomina **constante de proporcionalidad**.

Así, si x y y son directamente proporcionales entonces se cumple que $\frac{y}{x} = k$, con lo cual las magnitudes x y y se relacionan mediante la ecuación $y = x \cdot k$, donde k es la constante de proporcionalidad.

Por tanto, para que dos magnitudes sean directamente proporcionales se debe cumplir que:

- Estén directamente correlacionadas.
- La razón entre dos medidas correspondientes sea constante.

Matemáticamente

Si x y y son magnitudes directamente proporcionales, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

x	15	18	21
y	60	72	84



Propiedad de las magnitudes directamente proporcionales

Si A y B son magnitudes directamente proporcionales tales que p y q son medidas de la magnitud A que corresponden a las medidas r y s de la magnitud B , respectivamente, entonces se cumple que:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ o } \frac{p}{r} = \frac{q}{s}$$

Esta relación se denomina propiedad fundamental de las magnitudes directamente proporcionales.

Representación de las magnitudes directamente proporcionales

Las magnitudes directamente proporcionales se pueden representar mediante una tabla de datos o mediante una gráfica.

Para representar la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales en una tabla se debe tener en cuenta que:

- En la primera fila se ubican las medidas correspondientes a la primera magnitud.
- En la segunda fila se ubican las medidas de la segunda magnitud correspondientes a las medidas de la primera magnitud.

Para representar dos magnitudes directamente proporcionales mediante una gráfica, se ubican en el plano cartesiano las parejas ordenadas teniendo en cuenta que las coordenadas en x corresponden a la primera magnitud y las coordenadas en y corresponden a la segunda magnitud.

Al representar las parejas ordenadas determinadas por la tabla que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales todos los puntos pertenecen a una línea recta que pasa por el origen, es decir, por el punto $(0, 0)$.

EJEMPLOS

1. Determinar si las magnitudes x y y son directamente proporcionales a partir de la siguiente tabla.

x	2	3	5	6
y	100	150	250	300

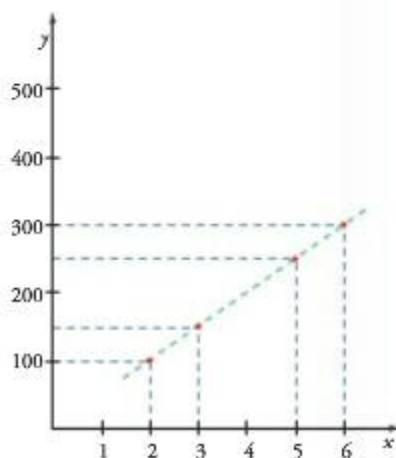
Se verifica que la razón entre los datos correspondientes sea constante.

$$\frac{2}{100} = \frac{1}{50} \quad \frac{3}{150} = \frac{1}{50}$$

$$\frac{5}{250} = \frac{1}{50} \quad \frac{6}{300} = \frac{1}{50}$$

Por tanto, las magnitudes x y y son directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es $k = \frac{1}{50}$.

Además, los puntos $(2, 100)$, $(3, 150)$, $(5, 250)$ y $(6, 300)$ pertenecen a una misma recta como se muestra en la gráfica.





2. Escribir la ecuación que relaciona las magnitudes A y B que aparecen en la siguiente tabla.

A	40	100	160	220	280
B	2	5	8	11	14

Primero, se verifica que las magnitudes sean directamente proporcionales. Para esto, se establece la razón entre cada medida de la primera magnitud y su correspondiente medida de la segunda magnitud.

$$\frac{40}{2} = 20 \quad \frac{100}{5} = 20 \quad \frac{160}{8} = 20 \quad \frac{220}{11} = 20 \quad \frac{280}{14} = 20$$

Luego, la constante de proporcionalidad es $k = 20$.

Finalmente, se tiene que $k = \frac{A}{B}$ de donde $A = 20B$, es la ecuación que relaciona ambas magnitudes.

3. En la Luna, debido a la gravedad, el peso de una persona es un sexto de su peso en la Tierra.

- a. Completar la tabla que relaciona los distintos pesos de personas en la Tierra con su peso en la Luna.

Peso en la Tierra ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$)	45	52	60	64	72
Peso en la Luna ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$)					



Primero, se representa con L el peso de una persona en la Luna y con T el peso de una persona en la Tierra.

Luego, como el peso de una persona en la Luna es un sexto de su peso en la Tierra, entonces, se tiene que $L = \frac{1}{6} T$.

De acuerdo con esto, se remplazan los valores de T y se calculan los valores de L , así:

$$\frac{45}{6} = 7,5 \quad \frac{52}{6} = 8,6 \quad \frac{60}{6} = 10 \quad \frac{64}{6} = 10,6 \quad \frac{72}{6} = 12$$

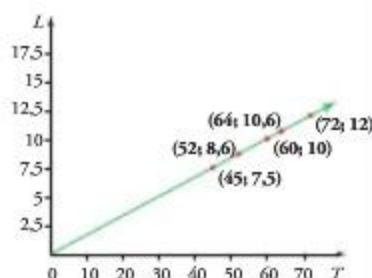
Finalmente, se completa la tabla.

T	45	52	60	64	72
L	7,5	8,6	10	10,6	12

- b. Realizar la gráfica.

Para hacer la gráfica se ubican en el plano cartesiano las parejas ordenadas que aparecen en la tabla del literal a: $(45; 7,5)$, $(52; 8,6)$, $(60; 10)$, $(64; 10,6)$ y $(72; 12)$.

Estos puntos pertenecen a una línea recta que pasa por el origen, como se muestra en la gráfica.





Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Soluciono problemas

R Responde.

86. ¿Cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales?
87. ¿En qué se diferencian las magnitudes directamente correlacionadas de la magnitudes directamente proporcionales?
88. ¿Cuál es la ecuación que relaciona dos magnitudes A y B proporcionales?

D Determina si las siguientes tablas muestran magnitudes directamente correlacionadas o directamente proporcionales.

89.

A	1,5	2	3,5
B	3	4	7

90.

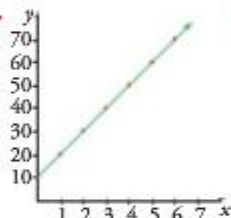
C	2	3	4
D	8	9	12

91.

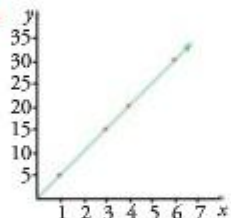
E	1	3	6
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3

E Establece cuáles de las siguientes gráficas representan magnitudes directamente proporcionales. Justifica tu respuesta.

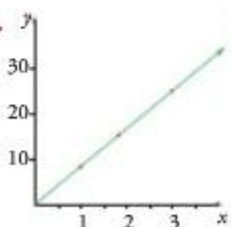
92.



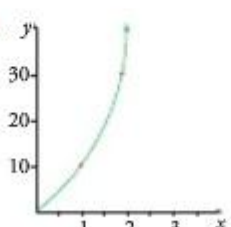
94.



93.



95.



E 96. Escribe dos situaciones que involucren magnitudes directamente proporcionales. Luego, realiza la gráfica correspondiente a cada situación.

M Las siguientes tablas muestran magnitudes directamente proporcionales. Complétalas y escribe la ecuación que relaciona las magnitudes.

97.

Número de pasos	40	48	
Tiempo (min)	5		8

98.

Masa (kg)		500	100
Volumen (cm ³)	40		80

99.

Número de vueltas	180		
Tiempo (min)	4	3	1

S Lee y resuelve.

En la novela *Los viajes de Gulliver*, del escritor inglés Jonathan Swift, el protagonista visita países donde sus habitantes son enanos o gigantes. Cuando Gulliver visitó Brobdingnag, los habitantes tenían una altura 12 veces mayor que la nuestra.



100. Completa la tabla que relaciona diferentes estaturas de seres humanos con las estaturas de los habitantes de Brobdingnag.

Estatura humanos (cm)	120	135	165	180
Estatura habitantes Brobdingnag (cm)				

101. Construye la gráfica que relaciona la estatura de algunos seres humanos con la estatura de los habitantes de Brobdingnag.



Escala



Actividades



Enlace web

Una aplicación de la proporcionalidad directa es la escala, la cual se aplica en campos como la geografía, la cartografía, la arquitectura, el arte, la ingeniería, etc.

La **escala** es una razón que indica la relación entre las dimensiones reales y las de un dibujo que representa la realidad, por ejemplo, un plano o un mapa. La escala también se utiliza para construir modelos tridimensionales de objetos reales, como por ejemplo, una maqueta.

Las escalas generalmente se escriben en forma de razón en la cual el antecedente indica la distancia en el plano o mapa y el consecuente indica la distancia en la realidad. Por ejemplo, la escala 1:100 en un plano, significa que un centímetro en el plano representa 100 cm en el lugar real.

También hay escalas que se expresan en diferentes unidades de medida. Por ejemplo, en un mapa en el cual 1 cm equivale a 10 km en la realidad, la escala se expresa como 1 cm = 10 km.

EJEMPLOS

1. Un mapa fue hecho a escala 1:250.000. Si una carretera recta mide 8,5 cm en el mapa, ¿cuántos kilómetros mide realmente la carretera?

Primero, se establece el significado de la escala 1:250.000

$$\frac{1}{250.000} \quad \text{--- Distancia en el mapa en centímetros (cm).}$$

$$\quad \quad \quad \text{--- Distancia real en centímetros.}$$

Luego, se plantea la proporción entre la escala y la razón que relaciona la longitud de la carretera en el mapa y su longitud real. Por tanto, se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{1}{250.000} = \frac{8,5}{x} \quad \text{Se plantea la proporción.}$$

$$x = 8,5 \times 250.000 \quad \text{Se despeja } x.$$

$$x = 2.125.000 \quad \text{Se multiplica.}$$

Finalmente, se tiene que la longitud real de la carretera es de 2.125.000 cm que equivalen a 21,25 km.

2. El siguiente dibujo se realizó en escala 1:100. ¿Cuáles son las dimensiones reales del automóvil?



Primero, se representa con L el largo real del automóvil y con A la altura real.

Luego, se plantean las siguientes proposiciones.

$$\frac{1}{100} = \frac{3,5}{L} \quad \text{y} \quad \frac{1}{100} = \frac{1,5}{A}$$

Finalmente, se despejan L y A .

$$L = 350 \quad \text{y} \quad A = 150$$

Por tanto, el automóvil tiene 3,5 m de largo y 1,5 m de alto.

Matemáticamente

A continuación se muestra el plano de una habitación en escala 1:100.

¿Cuáles son las dimensiones reales de la habitación?





Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Completa las siguientes proposiciones.

102. Si la copia de un dibujo está en escala 1:3, entonces, la copia es una _____ del dibujo original.

103. Si la copia de un dibujo está en escala 4:1, entonces, la copia es una _____ del dibujo original.

E **104.** Completa la siguiente tabla.

Objeto	Largo en el modelo	Largo real	Escala
Carro	10 cm	4,9 m	
Avión	12 cm	4.800 cm	
Hormiga	36 mm	8 mm	

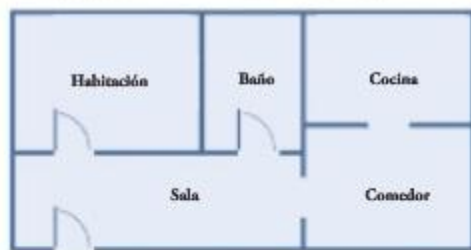
E Utiliza una regla para medir las longitudes en el plano. Luego, ten en cuenta que la escala es 1:200 y calcula las dimensiones reales de:

105. La cocina

107. La sala

106. La habitación

108. El comedor



R **109.** Completa la tabla teniendo en cuenta que el dibujo de la hormiga está en escala 9:1. Luego, responde.



2,7 cm

Longitud dibujo	1	
Longitud real		2,7

110. Si la escala del dibujo fuera 6:1, ¿cuál sería la longitud real de la hormiga?

I Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

111. Si un dibujo está en escala 1:80, entonces 3,5 cm en el dibujo representan 680 cm en la realidad.

112. Si un mapa está hecho en escala 1 cm = 500 km y la distancia real entre dos pueblos representado en el mapa es de 120 km, entonces la distancia entre los pueblos en el mapa es de 0,4 cm.

113. Si en una maqueta la escala es 1:450 la altura de un edificio es de 22 cm, entonces la altura real del edificio es de 99 m.

P **114.** Realiza una ampliación de la siguiente figura proponiendo una escala que consideres adecuada.



S Resuelve los siguientes problemas.

115. La maqueta del vagón de un tren mide 15 cm de largo. Si el vagón real tiene 24 m de largo, ¿cuál es la escala que se utilizó para elaborar la maqueta del tren?



116. En un plano se observa que 1,5 cm representa 45 km. Si dos puntos en el plano están a 0,8 cm, ¿cuál es la distancia real entre los dos puntos?

117. La escala de un mapa es $\frac{3}{4}$ cm = 12 km. ¿Cuál es el área real de un parque representado en el mapa por un rectángulo de 1 cm de ancho por 2 cm de largo?

118. Julián observa un microorganismo a través del microscopio en un aumento de 50. Si la imagen del microorganismo mide 1,5 cm, ¿cuál es su tamaño real?

119. María observa en un plano que la distancia que debe recorrer es de 3,2 cm. Si el plano está a escala 1:1.000.000, ¿qué distancia debe recorrer María realmente?



3. Proporcionalidad inversa



Recurso
imprimible

En algunas situaciones y fenómenos que relacionan dos magnitudes, ocurre que cuando los valores de una magnitud aumentan, los valores de la otra magnitud disminuyen.

3.1 Magnitudes inversamente correlacionadas



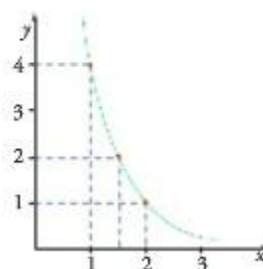
Actividad

Dos magnitudes están **inversamente correlacionadas** cuando, al aumentar una de ellas, la otra disminuye o cuando al disminuir una de ellas la otra aumenta.

Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran dos magnitudes inversamente correlacionadas.

Magnitud A	1	1,5	2
Magnitud B	4	2	1

En la tabla se puede observar que cuando los valores de A aumentan, los valores de B disminuyen, como se muestra en la gráfica.



3.2 Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando están inversamente correlacionadas y se cumple que el producto entre las medidas correspondientes de ambas magnitudes es constante.

La ecuación que relaciona dos magnitudes x y y que son inversamente proporcionales es:

$$y \cdot x = k \text{ que equivale a } y = \frac{k}{x}.$$

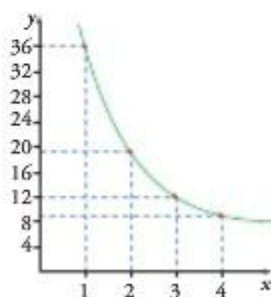
Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran dos magnitudes inversamente proporcionales.

Magnitud x	1	2	3	4
Magnitud y	36	18	12	9

La constante de proporcionalidad inversa en este caso es $k = 36$ porque:

$$1 \times 36 = 36 \quad 2 \times 18 = 36 \quad 3 \times 12 = 36 \quad 4 \times 9 = 36$$

Por tanto, la ecuación que relaciona las magnitudes x y y es $y = \frac{36}{x}$, cuya gráfica correspondiente es una curva como se muestra a continuación.



Enlace web

Historia de las matemáticas

La ley de Boyle



El filósofo y químico inglés Robert Boyle (1627-1691) descubrió una de las aplicaciones de la proporcionalidad inversa en la química. Boyle planteó que el volumen (V) de un gas ideal es inversamente proporcional a la presión P , es decir,

$$PV = k$$

donde k es constante.



Propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales

Si A y B son magnitudes inversamente proporcionales tales que m y n son medidas de la magnitud A que corresponden a las medidas p y q de la magnitud B , respectivamente, entonces se cumple que:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$$

EJEMPLOS

- Determinar si las magnitudes x y y de la siguiente tabla están inversamente correlacionadas.

x	8	6	4	2
y	2	4	6	8

Primero, se analizan las medidas de la magnitud x con respecto a las de la magnitud y .

Luego, se tiene que cuando los valores de la magnitud x disminuyen los valores de la magnitud y aumentan.

Finalmente, se concluye que las magnitudes x y y están inversamente correlacionadas.

- Analizar los datos de la tabla y determinar si las magnitudes son inversamente proporcionales.

Tiempo (h)	2	1	0,5	0,4
Velocidad (km/h)	10	20	40	50

Primero, se tiene que las magnitudes tiempo y velocidad de la tabla están inversamente correlacionadas porque al disminuir el tiempo aumenta la velocidad.

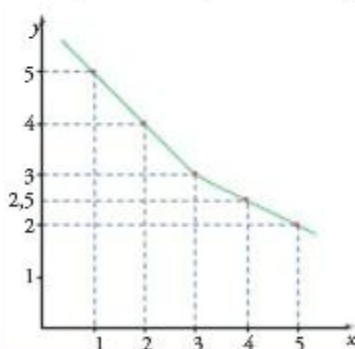
Luego, se calcula el producto entre las medidas correspondientes.

$$2 \times 10 = 20 \quad 1 \times 20 = 20 \quad 0,5 \times 40 = 20 \quad 0,4 \times 50 = 20$$

Finalmente, se concluye que las magnitudes son inversamente proporcionales porque están inversamente correlacionadas y porque el producto entre las medidas correspondientes es la constante $k = 20$.

- Observar la gráfica y determinar si las magnitudes son inversamente proporcionales.

Primero, se construye una tabla a partir de la gráfica.



x	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2,5	2

Luego, se calculan los productos entre las medidas correspondientes.

$$1 \times 5 = 5 \quad 2 \times 4 = 8 \quad 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 2,5 = 10 \quad 5 \times 2 = 10$$

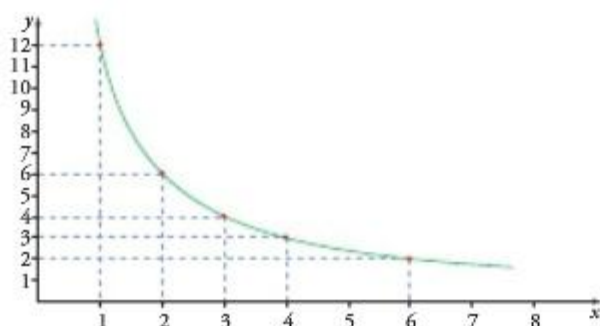
Finalmente, como el producto no es constante, las magnitudes no son inversamente proporcionales.

Matemáticamente

¿En qué se diferencian las magnitudes directamente proporcionales a las inversamente proporcionales?



4. Escribir la ecuación que relaciona las magnitudes inversamente proporcionales a partir de la gráfica.



Primero, se determinan las parejas ordenadas a partir de la gráfica, es decir, los puntos son (1, 12), (2, 6), (3, 4), (4, 3) y (6, 2).

Luego, se calcula el producto entre cada coordenada en x y su correspondiente coordenada en y .

$$1 \times 12 = 12 \quad 2 \times 6 = 12 \quad 3 \times 4 = 12$$

$$4 \times 3 = 12 \quad 6 \times 2 = 12$$

Finalmente, la constante de proporcionalidad inversa es $k = 12$. Por tanto, si se reemplaza el valor de k en la expresión $y = \frac{k}{x}$, se obtiene que la ecuación que relaciona ambas magnitudes inversamente proporcionales es $y = \frac{12}{x}$.

5. Una empresa fabricante de bicicletas realiza pruebas en una pista con diferentes diámetros de las ruedas. Para esto, mide el número de vueltas que se puede dar en una bicicleta en un tiempo determinado, según el diámetro de sus ruedas como se muestra en la siguiente tabla.



Diámetro (cm)	20	40	80
No. de vueltas	4	2	1

- a. Hallar la ecuación que relaciona las magnitudes de la tabla.

Primero, se multiplican las medidas correspondientes de ambas magnitudes.

$$4 \times 20 = 80 \quad 2 \times 40 = 80 \quad 80 \times 1 = 80$$

Luego, se tiene que la constante de proporcionalidad inversa es $k = 80$.

Finalmente, la ecuación es $x \cdot y = 80$.

- b. Calcular el diámetro que deberían tener las ruedas de una bicicleta para que en el mismo lapso de tiempo se pudieran dar 6 vueltas a la pista.

Si x es el diámetro y y es el número de vueltas, entonces se reemplaza $y = 6$ en la ecuación, con lo cual se obtiene que:

$$x \cdot 6 = 80 \text{ de donde } x = 13,33$$

Por tanto, el diámetro de las ruedas debería medir 13,33 cm.



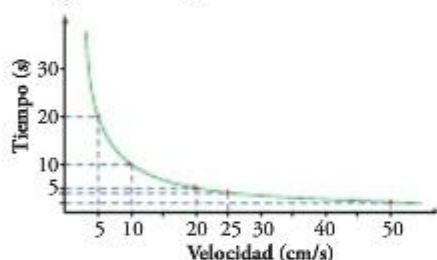
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

- 120.** Indica si las magnitudes son directamente proporcionales (DP), inversamente proporcionales (IP) o no son proporcionales (NP).

El tamaño de un objeto y lo que pesa.	
La cantidad de cuadernos y su precio.	
La cantidad de pasos iguales para recorrer una distancia y el tamaño de los pasos.	
El precio de la entrada a cine y la duración de la película.	
La cantidad de arena y cal necesaria para obtener cemento.	
El número de lados de un polígono y la suma de sus ángulos internos.	
La edad y el peso de una persona.	

- E** Observa la gráfica. Luego, resuelve.



- 121.** Completa la tabla de datos.

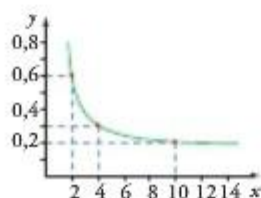
Tiempo (s)						
Velocidad (cm/s)						

- 122.** Halla la constante de proporcionalidad inversa.

- 123.** Escribe la ecuación que relaciona el tiempo (t) y la velocidad (v).

- 124.** Halla el valor t cuando $v = 35$ cm/s.

- 125.** Explica por qué la siguiente gráfica no representa magnitudes inversamente proporcionales.



- E** Completa las siguientes tablas teniendo en cuenta que las magnitudes que se relacionan en cada una son inversamente proporcionales.

126.

No. de días	No. de horas
10	
45	
5	18
1	
4,5	

127.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
25	
100	
6	
3	
50	9

- R** Resuelve teniendo en cuenta que las magnitudes en cada tabla son inversamente proporcionales.

- 128.** Calcula $\frac{x + y - z}{11}$

Magnitud A	x	20	30	$x + y$
Magnitud B	20	15	y	z

- 129.** Halla el valor de $\frac{x \cdot y}{z} + y^2$

Magnitud 1	x	20	10	24
Magnitud 2	8	6	y	z

- 130.** Escribe una situación que se pueda representar con los valores de la siguiente tabla. Luego, inventa una pregunta relacionada con proporcionalidad inversa y resuélvela.

30	15	12	10	6
2	4	5	6	10

- S** Una constructora determina la relación entre el número de trabajadores y el tiempo que tardan en construir una estructura como se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo (días)	42	21	14
No. de trabajadores	6	12	18

- 131.** Determina cuántos trabajadores se necesitan para terminar la obra en 9 días.

- 132.** Realiza la gráfica de la situación.



4. Aplicaciones de la proporcionalidad



Ampliación multimedia

La proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa se aplican en la resolución de problemas relacionados con otras ciencias y con situaciones de la vida cotidiana.

Para resolver problemas en los cuales se relacionan dos magnitudes en forma directa o inversamente proporcional, se aplica un método práctico conocido como **regla de tres**.

4.1 Regla de tres simple directa



Actividad

La regla de tres simple directa es un procedimiento que se utiliza para resolver problemas que se pueden representar mediante una proporción.

Para resolver un problema aplicando la regla de tres simple directa, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se organizan los datos de acuerdo con las magnitudes.

Luego, se plantea una proporción.

Finalmente, se aplican las propiedades de las proporciones para hallar el valor desconocido.

EJEMPLO

Si en 50 L de agua de mar hay 1.300 g de sal, ¿cuántos gramos de sal habrá en 200 L de agua de mar?

Primero, se organizan los datos según las magnitudes como se observa en la siguiente tabla.

Agua de mar (L)	Sal (g)
50	1.300
200	x



Luego, se plantea la proporción.

$$\frac{50}{200} = \frac{1.300}{x}$$

Finalmente, se aplican las propiedades de las proporciones para hallar el valor de x .

$$\frac{50}{200} = \frac{1.300}{x} \quad \text{Proporción.}$$

$$50 \cdot x = 1.300 \cdot 200 \quad \text{Se aplica la propiedad fundamental de las proporciones.}$$

$$x = \frac{1.300 \cdot 200}{50} \quad \text{Se divide entre 50.}$$

$$x = 5.200 \quad \text{Se efectúan las operaciones.}$$

Por tanto, en 200 L de agua de mar hay 5.200 g de sal.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** Determina cuáles de las siguientes situaciones se pueden resolver aplicando la regla de tres simple directa.

133. La altura de un edificio es de 78 m y la altura de una torre contigua es de 21 m. ¿Cuántos metros más alto es el edificio que la torre?

134. En una empresa se adquieren 12 computadores con un precio de \$1.550.00 cada uno. Si se quiere comprar 15 computadores más de los mismos, ¿cuál es su costo?

135. Julián gasta \$26.000 en transporte cada semana. ¿Cuánto debe invertir en transporte Julián durante el año?

136. Rocío tiene en su cuenta bancaria \$560.000. Si le descuentan \$170.000, ¿cuánto dinero le queda en su cuenta?

- A** Explica cuál fue el error que se cometió al resolver el siguiente problema. Luego, corrígelo.

137. Para pavimentar 12 m² de área en una construcción, se necesitan 1,5 m³ de concreto. ¿Qué cantidad de concreto se necesitará para pavimentar una calle de 48 m²?

$$\frac{1,5}{48} = \frac{12}{x} \quad \text{Se plantea la proporción.}$$

$$x \cdot 1,5 = 48 \cdot 12 \quad \text{Se aplican propiedades de las proporciones.}$$

$$x \cdot 1,5 = 576 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$x = 384 \quad \text{Se divide entre 1,5.}$$

- P** Observa cada cartel e inventa un problema que se pueda resolver mediante regla de tres simple directa. Luego, resuélvelo.

138.



139.



- R** Lee cada situación y completa la tabla correspondiente para resolver el problema.

140. Si en un salón hay 3 niños por cada 2 niñas y en total hay 36 niños, ¿cuántas niñas hay en el salón?

Cantidad de niños	Cantidad de niñas

141. José ha recibido \$20.000 para repartir volantes publicitarios durante 4 horas. Si trabaja 3 horas más, ¿cuánto dinero recibirá?

Horas de trabajo	Pago \$

- S** Resuelve los siguientes problemas.

142. Un ciclista viaja con una rapidez constante. Si recorre 69 km en 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 92 km?

143. La familia Pérez debe pagar \$2.520.000 por su alojamiento en un hotel durante $1\frac{1}{2}$ semana. ¿Cuánto deberá pagar por el alojamiento de $3\frac{1}{2}$ semanas?

144. Una familia consume en promedio 2,5 litros de leche diarios. ¿Cuántos litros de leche consume en una semana?

145. Con 200 L de agua se llenan $\frac{4}{15}$ de un tanque. ¿Cuál es la capacidad total del tanque?

146. En un CD de 800 megabytes se pueden almacenar 80 minutos de música. ¿Cuántas horas de música se pueden almacenar en un DVD de 4.000 megabytes?

147. Tres buques consumen 12 barriles de petróleo en 5 días. ¿Cuántos barriles consumirán durante 9 días?

148. Una ballena recorre seis kilómetros en 45 minutos. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en seis horas y media?



4.2 Regla de tres simple inversa



Recurso
imprimible

La **regla de tres simple inversa** es un procedimiento que permite encontrar el valor desconocido en una situación de proporcionalidad inversa que relaciona dos magnitudes.

Para resolver un problema por regla de tres simple inversa se realizan los siguientes pasos:

Primero, se nombra la cantidad desconocida con una letra y se elabora una tabla con las cantidades que intervienen.

Luego, se plantea una proporción de acuerdo con la propiedad de las magnitudes inversamente proporcionales y se encuentra el término desconocido.

EJEMPLOS

1. En una finca seis cachorros, tienen alimento para 15 días. ¿Cuánto tiempo alcanzará el suministro alimenticio, si se aumenta en tres la cantidad de cachorros? Tener en cuenta, que cada cachorro consume la misma cantidad de ración diaria.



La relación entre la cantidad de cachorros y el tiempo de duración del alimento es de proporcionalidad inversa, ya que, al aumentar la cantidad de cachorros se espera que disminuya el tiempo de duración del alimento proporcionalmente.

Como se aumenta en 3, la cantidad que hay, entonces ahora hay 9 cachorros en la finca. Si t es el tiempo de duración del alimento, se tiene:

Tiempo (días)	Cantidad de cachorros
15	6
t	9

La proporción correspondiente es:

$$\frac{15}{t} = \frac{9}{6}$$

$$15 \times 6 = 9 \times t$$

$$t = \frac{15 \times 6}{9} = \frac{90}{9} = 10$$

Por tanto, el alimento con 3 cachorros más alcanzará para 10 días.

2. En una planta embotelladora de agua se envasan 1.600 botellas con una capacidad de 1,25 L cada una. Si se desea envasar la misma cantidad total de agua en envases de 4 L, ¿cuántas botellas son necesarias?



La cantidad de envases y la capacidad de cada uno son magnitudes inversamente proporcionales, ya que, al disminuir la cantidad de envases se necesita una mayor capacidad de cada envase, para envasar una misma cantidad total de agua. Si x es la cantidad de botellas, cada uno con una capacidad de 4 L, la tabla que muestra los datos es:

Cantidad de envases	Capacidad de cada envase (litros)
1.600	1,25 L
x	4 L

La proporción correspondiente es:

$$\frac{1.600}{x} = \frac{4}{1,25}$$

$$1.600 \times 1,25 = 4 \times x$$

$$x = \frac{1.600 \times 1,25}{4} = \frac{2.000}{4}$$

$$x = 500$$

Por tanto, se necesitan 500 envases con una capacidad de 4 L cada uno.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Identifica cuáles de las siguientes situaciones se pueden solucionar aplicando regla de tres simple inversa. Explica tu respuesta.

149. Se debe suministrar 120 mg por 2 mililitros de agua de un medicamento en polvo, ¿qué cantidad de agua se necesita mezclar con 300 mg del medicamento?

150. Una estación de gasolina cuenta con una bomba antigua y una nueva. La bomba nueva llena un tanque de un auto en 3 minutos a una velocidad de 15 L/min. ¿Cuánto tiempo gasta la bomba antigua en llenar el tanque del mismo auto, si lo hace a razón de 10 litros por minuto?

151. Una constructora necesita 6 trabajadores para construir una casa en 42 días. ¿Cuántos trabajadores se necesitan para construir la misma casa en 28 días?

R Observa las tablas que muestran datos de magnitudes inversamente proporcionales. Luego, explica la relación entre las magnitudes y escribe la proporción correspondiente.

152.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
144	6
36	24

153.

Cantidad de obreros	Tiempo (días)
15	8
20	6

154.

Ración (g)	Tiempo (días)
150	6
120	7,5

S Lee y resuelve.

155. Para construir un puente de 15 km se cuenta con 300 vigas, que se colocarían cada 50 m. Luego de un estudio de resistencia, se decide reforzar el puente y se utilizan 200 vigas más. ¿A qué distancia se deben colocar las vigas una después de otra?

156. Un grifo llena un tanque en 20 minutos con un flujo de 15 L/min. Si se reduce el flujo a 5 L/min, ¿cuántos minutos son necesarios para llenar el tanque?

157. Agustín ordena todos sus libros en 20 estantes iguales, colocando 35 libros en cada uno. Si es posible colocar 50 libros en cada repisa, ¿cuántos estantes son necesarios para organizar los libros?

158. Con una velocidad media de 60 km/h, un automóvil gasta tres horas en viajar entre dos ciudades. ¿Cuánto tiempo gastará el automóvil en recorrer el mismo trayecto si su velocidad media es 90 km/h?

159. Con un consumo de 4 horas diarias, un calentador de gas dura 24 días. ¿Cuánto duraría la máquina con un consumo de 6 horas diarias?



160. La familia Pérez recibió la visita de 4 familiares, razón por la cual, los alimentos duraron 5 días. Si la familia Pérez tiene 10 miembros, ¿normalmente cuánto duran sus provisiones?

Lee, observa y responde.

Cada rueda dentada gira de manera que la cantidad de dientes y el número de vueltas son inversamente proporcionales, como se muestra en la figura.



161. Si una rueda de 20 dientes da 280 vueltas, ¿cuántas vueltas alcanza a dar una rueda de 28 dientes?

162. Si una rueda de 16 dientes da en total 900 vueltas, ¿cuántos dientes tiene una rueda que da 600 vueltas?

163. Usando un balde de 15 L de capacidad 210 veces, se extrae el agua de un pozo. Al emplear baldes de 25 L, ¿cuántas veces se necesita introducir el balde al pozo para obtener la misma cantidad de agua?



4.3 Regla de tres compuesta



Ampliación multimedia

En algunas situaciones de proporcionalidad se relacionan más de dos magnitudes. En estos casos se aplica un método conocido como **regla de tres compuesta**.

Propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta

Sean A , B y C magnitudes relacionadas, tal que: m y n medidas de la magnitud A ; p y q medidas de la magnitud B y r y s medidas de la magnitud C , como se muestra en la tabla.

Al comparar la magnitud A con las magnitudes B y C se pueden presentar los siguientes tipos de proporcionalidad.

- A es directamente proporcional a B y C , entonces:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$$

- A es inversamente proporcional a B y C , entonces:

$$\frac{m}{n} = \frac{q}{p} \times \frac{s}{r}$$

- A es directamente proporcional a B y A es inversamente proporcional a C , entonces:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r}$$

Magnitudes		
A	B	C
m	p	r
n	q	s

Para resolver un problema por regla de tres compuesta se procede así:

Primero, se organizan los datos en una tabla.

Luego, se compara la magnitud de la incógnita con cada una de las otras dos magnitudes, para determinar el tipo de proporcionalidad que hay entre ellas, manteniendo constantes en cada caso, la magnitud restante.

Por último, se plantea la proporción de acuerdo con el caso correspondiente de la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta y se halla el valor desconocido.

Matemáticamente

¿Cuáles serían las situaciones si el problema involucra cuatro magnitudes A , B , C y D ?

EJEMPLOS

1. En una empresa de tejidos, cinco operarios de igual rendimiento, tejen 3.600 guantes en seis días. ¿Cuántos guantes tejerán siete operarios, de igual rendimiento que los anteriores, en ocho días?

Número de operarios	Guantes	Tiempo (días)
5	3.600	6
7	x	8

Las magnitudes guantes y operarios son directamente proporcionales y las magnitudes guantes y tiempo son directamente proporcionales. La proporción correspondiente es:

$$\frac{3.600}{x} = \frac{5}{7} \times \frac{6}{8} = \frac{30}{56}$$

$$x = \frac{56 \times 3.600}{30} = \frac{201.600}{30} = 6.720$$

Por tanto, siete operarios, trabajando durante ocho días, tejerán 6.720 guantes.

2. En un edificio, 6 obreros pintan un área de 300 m² durante 2 horas. ¿Cuántos obreros se necesitan para pintar un área de 400 m² en 1 hora?

Obreros	Área (m ²)	Tiempo (horas)
6	300	2
x	400	1

La cantidad de obreros es directamente proporcional con el área pintada y la cantidad de obreros es inversamente proporcional con el tiempo. La proporción correspondiente es:

$$\frac{6}{x} = \frac{300}{400} \times \frac{1}{2} = \frac{300}{800}$$

$$x = \frac{6 \times 800}{300} = \frac{4.800}{300} = 16$$

Por tanto, 16 obreros son necesarios para pintar un área de 400 m² en 1 hora.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **P** Propongo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** Explica con un ejemplo cada situación y plantea la proporción correspondiente.

164. La magnitud A es inversamente proporcional a las magnitudes B y C .

165. La magnitud A es directamente proporcional a las magnitudes B y C y la magnitud A es inversamente proporcional a D .

- P** Lee, relaciona las magnitudes, organiza los datos en una tabla y formula una posible proporción teniendo en cuenta todas las magnitudes:

166. Magnitud A : aviones

Magnitud B : combustible (litros)

Magnitud C : tiempo (horas)

167. Magnitud A : cantidad de bovinos

Magnitud B : alimento (kilogramos)

Magnitud C : tiempo (días)

168. Magnitud A : número de personas

Magnitud B : costo del servicio de hospedaje

Magnitud C : tiempo (días)

- R** Observa. Luego, responde.



169. ¿Cuánto tiempo gastaron siete fotocopadoras en obtener 1.400 fotocopias?

- S** Lee y resuelve.

170. 20 máquinas trabajan un terreno de 60 hectáreas en 18 días. ¿Cuántas máquinas iguales trabajarán un terreno de 36 hectáreas en 12 días?

171. Un grupo de 4 tejedores produce 320 chalecos en 10 días. ¿Cuántos chalecos producirán 10 tejedores, de igual rendimiento que los anteriores, en 16 días?

172. En 8 horas, 20 camiones descargan 160 m^3 de arena. ¿Cuántos camiones son necesarios para descargar 125 m^3 de arena en 5 horas?



173. Un barco de pasajeros necesita 180.000 litros de agua potable para atender a 1.500 personas durante un crucero en 15 días. ¿Cuántos litros de agua potable deben ser almacenados para atender a 1.800 personas durante un viaje de 9 días?



174. Trabajando 8 horas al día, 2.500 obreros de una industria automotriz, producen 500 autos en 30 días. ¿Cuántos días son necesarios para que 1.200 trabajadores produzcan 450 autos, trabajando 10 horas al día?



175. En un centro de convenciones, se tiene un presupuesto de 2,5 millones de pesos para alimentar a 18 expositores durante 12 días. Si el número de expositores aumenta en 6 personas, ¿para cuántos días alcanzará el presupuesto inicial?



4.4 Repartos proporcionales



Actividad

En algunas situaciones se requiere repartir una cantidad determinada de tal manera que las partes en que se divida no sean iguales sino que se deben repartir en forma directa o inversamente proporcional a otras cantidades.

Se denomina reparto proporcional al proceso mediante el cual se distribuye una cantidad en forma directa o inversamente proporcional a ciertas cantidades previamente acordadas.

Reparto directamente proporcional

Repartir una cantidad s , donde $s = p + q + r$, en partes directamente proporcionales a los números m , n y t , es hallar las cantidades p , q y r tales que:

$$\frac{s}{m+n+t} = \frac{p}{m} = \frac{q}{n} = \frac{r}{t}$$

Para resolver un problema, usando un reparto directamente proporcional se aplica la propiedad fundamental de las series de razones.

EJEMPLO

Ricardo, José y Luisa compraron un billete de lotería, Ricardo aportó \$500, José, \$1.000 y Luisa, \$2.500. Si ganaron un premio de 5 millones, ¿cuánto dinero le corresponde del premio a cada uno?

Como la repartición es directamente proporcional, se establecen las proporciones utilizando las variables p , q y r , así:

p : dinero que recibe Ricardo. q : dinero que recibe José.

r : dinero que recibe Luisa.

Luego, se tiene:

$$p + q + r = 5.000.000$$

$$\frac{p}{500} = \frac{q}{1.000} = \frac{r}{2.500} \quad \text{Se plantean las proporciones.}$$

$$\frac{p+q+r}{500+1.000+2.500} = \frac{p}{500} \quad \text{Se aplica el reparto proporcional.}$$

$$\frac{5.000.000}{4.000} = \frac{p}{500} \quad \text{Se reemplaza } p+q+r \text{ y se realiza la suma.}$$

$$p = 625.000 \quad \text{Se despeja } p \text{ y se simplifica.}$$

$$\frac{p+q+r}{500+1.000+2.500} = \frac{q}{1.000} \quad \text{Se aplica el reparto proporcional.}$$

$$\frac{5.000.000}{4.000} = \frac{q}{1.000} \quad \text{Se reemplaza } p+q+r \text{ y se realiza la suma.}$$

$$q = 1.250.000 \quad \text{Se despeja } q \text{ y se simplifica.}$$

$$\frac{p+q+r}{500+1.000+2.500} = \frac{r}{2.500} \quad \text{Se aplica el reparto proporcional.}$$

$$\frac{5.000.000}{4.000} = \frac{r}{2.500} \quad \text{Se reemplaza } p+q+r \text{ y se realiza la suma.}$$

$$r = 3.125.000 \quad \text{Se despeja } r \text{ y se simplifica.}$$

Por tanto, Ricardo recibe \$625.000, José, \$1.250.000 y Luisa, \$3.125.000 del premio de \$5.000.000.

Historia de las matemáticas

Repartos proporcionales

En el Papiro de Rhind, se hace uso de los repartos proporcionales, particularmente en la repartición de herencias.

En cada época se han tenido reglas para repartir los bienes entre los herederos. Así, en algún tiempo, era el primer hijo el que heredaba todos los bienes.

En otros casos, las hijas recibían la mitad de lo que heredaban los hijos varones.



Reparto inversamente porporcional

Repartir una cantidad s , donde $s = p + q + r$, en partes inversamente proporcionales a los números m , n y t , es hallar las cantidades p , q y r , tales que:

$$\frac{s}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{t}} = \frac{p}{\frac{1}{m}} = \frac{q}{\frac{1}{n}} = \frac{r}{\frac{1}{t}}$$

EJEMPLO

Tres camareros se comparten \$295.000 resultado de las propinas, la repartición se hace en partes inversamente proporcionales a los días que faltaron durante el mes, que fueron 2, 5 y 7. ¿Cuánto dinero corresponde a cada camarero?

La repartición es inversamente proporcional, ya que a mayor cantidad de días de inasistencia, menor cantidad de dinero recibido.

p : dinero recibido por el camarero que faltó 2 días.

q : dinero recibido por el camarero que faltó 5 días.

r : dinero recibido por el camarero que faltó 7 días.

Luego, se tiene:

$$p + q + r = 295.000$$

$$\frac{p + q + r}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = \frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{q}{\frac{1}{5}} = \frac{r}{\frac{1}{7}} \quad \text{Se aplica el reparto inversamente proporcional.}$$

$$\frac{295.000}{\frac{59}{70}} = \frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{q}{\frac{1}{5}} = \frac{r}{\frac{1}{7}} \quad \text{Se reemplaza } p + q + r \text{ y se resuelven las operaciones.}$$

$$\frac{295.000}{\frac{59}{70}} = \frac{p}{\frac{1}{2}} \quad \text{Se plantea la proporción para } p.$$

$$350.000 = 2p \quad \text{Se simplifica.}$$

$$p = 175.000 \quad \text{Se despeja } p.$$

$$\frac{295.000}{\frac{59}{70}} = \frac{q}{\frac{1}{5}} \quad \text{Se plantea la proporción para } q.$$

$$350.000 = 5q \quad \text{Se simplifica.}$$

$$q = 70.000 \quad \text{Se despeja } q.$$

$$\frac{295.000}{\frac{59}{70}} = \frac{r}{\frac{1}{7}} \quad \text{Se plantea la proporción para } r.$$

$$350.000 = 7r \quad \text{Se simplifica.}$$

$$r = 50.000 \quad \text{Se despeja } r.$$

Por tanto, el camarero que faltó 2 días recibió \$175.000; el camarero que faltó 5 días recibió \$70.000 y el camarero que faltó 7 días recibió \$50.000.





Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** Reparte cada número en partes directamente proporcionales.

176. 70 entre 3 y 4.

177. 600 entre 10 y 20.

178. 1.500 entre 8, 10 y 12.

179. 6.300 entre 7, 14 y 21

180. 108 entre $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{6}$.

- E** Reparte cada número en partes inversamente proporcionales.

181. 144 entre 1 y 2.

182. 35.000 entre 15 y 20.

183. 61 entre 3, $\frac{2}{5}$ y 14.

184. 43 entre $\frac{3}{5}$, 0,4 y $\frac{1}{3}$.

185. 308 entre 2, 3, 4 y 5.

- R** Realiza la repartición de 2.100 en forma directamente proporcional a:

186. 1 y 2

189. 1, 2, 3, 4 y 5

187. 1, 2 y 3

190. 1, 2, 3, 4, 5 y 6

188. 1, 2, 3 y 4

191. 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

- A** Lee y responde. Justifica tu respuesta.

192. Se realiza un reparto de 1.200 correspondiente a 5 y 6. Si a 6 le corresponden 500 y a 5 le corresponden 700, ¿es la repartición inversamente proporcional?

193. Cuando se reparte una cantidad en partes inversamente proporcionales a 10, 6 y 3, la cantidad que corresponde a 3 es 50. ¿Qué cantidad le toca a 10 y 6?

194. La medida de los tres ángulos de un triángulo están en relación directa de 2, 4 y 6. ¿Cuánto mide el ángulo mayor?

- E** Determina el valor desconocido de la variable que se indica en cada caso.

195. Si $\frac{p}{q} = \frac{7}{2}$ y $p + q = 63$, calcula p .

196. Si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$ y $a + b + c = 96$, halla a .

197. Si $\frac{a}{30} = \frac{b}{12} = \frac{c}{10}$ y $a + b + c = 52$, calcula el valor de $a - c$.

- S** Lee y resuelve.

198. Las edades de Ana, Juan y César son directamente proporcionales a 2, 3 y 4. Si la suma de las edades es 72 años, ¿qué edad tiene cada uno?



199. Un empresario regalará 450 bonos a los tres departamentos de su compañía, de manera proporcional a la cantidad de personas que los componen. El departamento de mercadeo tiene 10 empleados, el de administración, 15 y el de producción, 20, ¿cuántos bonos se repartirán a cada departamento?

200. En un complejo residencial conformado por tres edificios, se decide construir una piscina de uso común. El presupuesto de la obra asciende a 165 millones que se reparten en forma proporcional con los edificios. Además, se conoce que en el edificio A hay 44 apartamentos, en el B hay 55 y en el C hay 51 apartamentos. ¿Cuánto será el aporte del edificio C?



201. Tres socios aportan a un negocio 3,5; 2,8 y 6,4 millones de pesos, y después de 5 años reciben una ganancia de 444,5 millones de pesos. ¿Qué cantidad de la ganancia le corresponde a cada socio si se hace un reparto proporcional a lo aportado?



5 Lee y resuelve.

- 202.** Se necesita fabricar 10.000 tornillos y para ello se contratan 2 operarios. El primero fabrica 5.000 tornillos en 10 horas y el segundo, fabrica el resto en 8 horas. Al terminar, se reparte entre ellos un bono de \$180.000 de acuerdo con su rendimiento. ¿Cuánto le corresponde a cada operario?



- 203.** En una competencia de relevos de 1.500 m de longitud, un equipo conformado por tres atletas, se divide la distancia que debe correr cada uno en partes inversamente proporcionales a 1, 2 y 6, para aprovechar al máximo las condiciones de cada uno. ¿Cuál es la distancia que recorre cada atleta?



- 204.** Un profesor asignó 65 ejercicios en forma inversamente proporcional entre los estudiantes que obtuvieron bajos puntajes en la evaluación. Si en la evaluación Luisa obtuvo 8 puntos, David 6 puntos y Julián 4 puntos, ¿cuántos ejercicios debe realizar cada estudiante?
- 205.** Dos grupos de 5 carpinteros construyen cada uno, una biblioteca. El primer grupo hace la biblioteca en 12 horas y el segundo en 15 horas. Si por la fabricación de las dos bibliotecas se reciben \$900.000, ¿cuánto recibió cada carpintero del primer grupo?
- 206.** Se reparten \$3.600.000 entre tres personas, de forma inversamente proporcionales a sus salarios. Si el salario menor es $\frac{3}{4}$ del salario intermedio y este es $\frac{2}{3}$ del salario mayor, ¿cuánto le corresponde al que tiene mayor salario?

- 207.** Una cantidad x se ha distribuido en partes directamente proporcionales a los números p , q y r . Si las partes obtenidas son $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$ y $\frac{x}{6}$, respectivamente, si $p + q + r = 18$, ¿cuáles son los números p , q y r ?

- 208.** Dos secretarías digitan la misma cantidad de páginas, la primera en 3 días y medio y la segunda en 5 días. Si el pago es inversamente proporcional al tiempo empleado y si recibieron un pago total de \$595.000, ¿cuánto dinero recibió cada una?

- 209.** Para la financiación de los uniformes de las escuelas deportivas, la junta administrativa local asignó un capital de \$3.690.000.

Esta suma se repartirá de forma proporcional a las personas inscritas en cada deporte, como se muestra en la siguiente tabla.

Deporte	Inscritos
Fútbol	600
Baloncesto	400
Patinaje	800



¿Cuánto dinero se asignará a cada deportista?

- 210.** Tres soldados salen de campaña, con tan mala suerte que uno de ellos pierde la mochila donde lleva las provisiones. Después de algún tiempo se sientan a comer, uno de sus compañeros aporta 7 panes y el otro 3. Dichos panes son repartidos en proporciones iguales y a cada uno le corresponden 10 pedazos.

Al regresar al cuartel el soldado que había perdido todo, recompensa a sus compañeros con \$10.000. ¿Cuánto dinero debe recibir cada uno de sus compañeros?

- 211.** Dibuja en tu cuaderno, tres ángulos cuyas medidas sean directamente proporcionales a 7, 6 y 5. Además, los ángulos forman un ángulo llano.

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás porcentajes. Determina el 10% de 300, el 50% de 300 y el 25% de 300.



4.5 Porcentaje



Actividad

El porcentaje se aplica en diversas situaciones relacionadas con economía, estadística, medicina, demografía, deportes y otros campos.

El porcentaje o tanto por ciento es la razón que indica la cantidad que se toma de cada 100 y se simboliza %.

Por ejemplo, en la expresión “El salario mínimo se incrementó el 4% este año”, 4% se lee 4 por ciento, que equivale a $\frac{4}{100}$ y significa que se incrementa \$4 por cada \$100 del salario mínimo.

Cálculo del porcentaje de un número

Para calcular el $t\%$ de un número n se multiplica el número n por $\frac{t}{100}$. Así:

$$t\% \text{ de } n \text{ es } n \cdot \frac{t}{100}.$$

EJEMPLOS

1. Hallar el porcentaje indicado.

a. 25% de 380.

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{t}{100} &= 380 \cdot \frac{25}{100} && \text{Se aplica la fórmula del porcentaje de un número.} \\ &= \frac{9.500}{100} = 95 && \text{Se multiplica y se simplifica.} \end{aligned}$$

Por tanto, el 25% de 380 es 95.

b. 0,8% de 120.

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{t}{100} &= 120 \cdot \frac{0,8}{100} && \text{Se aplica la fórmula del porcentaje de un número.} \\ &= \frac{96}{100} = 0,96 && \text{Se multiplica y se simplifica.} \end{aligned}$$

2. En un almacén de ropa ofrecen una promoción de pantalones de \$85.000 con un descuento del 30%.

a. ¿Cuánto es el descuento?

Para obtener el dinero correspondiente al descuento, se calcula 30% de \$85.000

$$\begin{aligned} 85.000 \times \frac{30}{100} &&& \text{Se halla 30\% de 85.000.} \\ &= \frac{2.550.000}{100} = 25.500 && \text{Se multiplica y se simplifica.} \end{aligned}$$

Por tanto, el descuento corresponde a \$25.500.

b. ¿Cuánto se debe pagar por el pantalón?

Como el descuento es de \$25.500, para averiguar cuánto se pagará por un pantalón, se resta el valor del descuento al precio original, así:

$$85.000 - 25.500 = 59.500.$$

Por tanto, se pagará \$59.500 por el pantalón.

Historia de las matemáticas

Tanto por ciento

El tanto por ciento fue usado en las principales obras de los escritores italianos del siglo XV. En esta época se usaba la palabra “decento” en las operaciones mercantiles.

Al parecer su abreviatura “cto” fue alterándose hasta convertirse en el símbolo %.

El primer autor en usar el símbolo % para el porcentaje, fue Delaporte en su libro *Le Guide des Negocien*. La expresión “por ciento” proviene del latín *per centum*, que significa “división por 100”.



Actividad

Determinación del tanto por ciento

Para determinar el tanto por ciento, usualmente se aplica una regla de tres simple directa.

Por ejemplo, en la siguiente tabla se muestran los resultados de una encuesta sobre la preferencia de sabores de helado.

Sabores	Chocolate	Arequipe	Frutos rojos	Vainilla
Frecuencia	56	34	30	40

Para hallar el porcentaje de personas que prefieren cada sabor, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se suma el total de personas encuestadas, que corresponde al 100%.

$$56 + 34 + 30 + 40 = 160$$

Luego, se organizan los datos en tablas, según el sabor.

Chocolate	
Personas	Porcentajes
160	100
56	x

La proporción correspondiente es:

$$\frac{160}{56} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 35$$

Por tanto, 35% de personas encuestadas prefieren helado de chocolate.

Arequipe	
Personas	Porcentajes
160	100
34	x

La proporción correspondiente es:

$$\frac{160}{34} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 21,25$$

Por tanto, 21,25% de personas encuestadas prefieren helado de arequipe.

Frutos rojos	
Personas	Porcentajes
160	100
30	x

La proporción correspondiente es:

$$\frac{160}{30} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 18,75$$

Por tanto, 18,75% de personas encuestadas prefieren helado de frutos rojos.

Vainilla	
Personas	Porcentajes
160	100
40	x

La proporción correspondiente es:

$$\frac{160}{40} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 25$$

Por tanto, 25% de personas encuestadas prefieren helado de vainilla.

En general, para determinar qué porcentaje es la cantidad n de la cantidad m , se multiplica por 100 la razón $\frac{n}{m}$, es decir, $\frac{n}{m} \times 100$.

Por ejemplo, si en un salón de clases hay 21 mujeres de un total de 30 estudiantes, para determinar el porcentaje de estudiantes que corresponde a las mujeres, se aplica la fórmula así:

$$\frac{n}{m} \times 100 = \frac{21}{30} \times 100 = \frac{2.100}{30} = 70$$

Por tanto, 70% de los 30 estudiantes son mujeres.



EJEMPLOS

1. Mónica va a comprar un portátil por un precio de \$1.500.000, pero por aniversario de la tienda, le ofrecen un descuento del 20%. Además, por realizar compra al contado le hacen otro descuento adicional del 15%. ¿Cuánto pagará Mónica por el portátil?



Primero, el descuento del 20% que ofrece la tienda se obtiene como:
20% de 1.500.000

$$\frac{20}{100} \times 1.500.000 = \frac{20 \times 1.500.000}{100} = 300.000$$

Luego, el precio del portátil con el descuento del 20% es:

$$1.500.000 - 300.000 = 1.200.000$$

Ahora, del precio del portátil con el descuento del 20% se obtiene la cantidad de dinero correspondiente al descuento del 15% por el pago de contado.

15% de 1.200.000

$$\frac{15}{100} \times 1.200.000 = \frac{15 \times 1.200.000}{100} = 180.000$$

Finalmente, el dinero que debe pagar por el portátil es:

$$1.200.000 - 180.000 = 1.020.000$$

Por tanto, el precio final del portátil es \$1.020.000.

2. En el mes pasado, Juan consultó el precio de un galón de gasolina y una libra de café. En la actualidad los precios han variado, el galón de gasolina que costaba \$8.300 obtuvo un aumento del 10%, mientras que la libra de café que costaba \$3.800 presentó una disminución del 7%. ¿Cuánto debe pagar Juan actualmente por un galón de gasolina y una libra de café?

Primero, se determina el porcentaje del precio actual de un galón de gasolina en relación el precio antiguo, así:

$$100\% + 10\% = 110\%$$

Luego, se calcula 110% del precio antiguo del galón de gasolina, para conocer su precio actual.

110% de \$8.300

$$\frac{110}{100} \times 8.300 = \frac{110 \times 8.300}{100} = 9.130$$

Ahora, de la misma forma se obtiene el precio actual de una libra de café:

$$100\% - 7\% = 93\%$$

Finalmente, se calcula el 93% del precio antiguo de una libra de café, para conocer su precio actual.

93% de 3.800

$$\frac{93}{100} \times 3.800 = \frac{93 \times 3.800}{100} = 3.534$$

Por tanto, el precio actual de un galón de gasolina es \$9.130 y de una libra de café, \$3.534.

Aumentar un $n\%$ equivale a calcular el $(100 + n)\%$ de esta cantidad.

Disminuir un $m\%$ equivale a calcular el $(100 - m)\%$ de esta cantidad.

Matemáticamente

¿Por cuál número se debe dividir una cantidad para hallar el 50%, 25% y 20% respectivamente?



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde. Explica tu respuesta.

212. ¿Cómo se expresa un porcentaje mediante un número racional?
213. ¿Qué porcentaje es la cantidad p de la cantidad q ?
214. ¿Cómo se calcula el aumento o la disminución de una cantidad en un porcentaje p ?

E Expresa cada razón como porcentaje.

215. $\frac{54}{100}$ 218. $\frac{43}{100}$
216. $\frac{2}{25}$ 219. $\frac{13}{4}$
217. $\frac{1}{20}$ 220. $\frac{5,27}{10}$

E Halla los siguientes porcentajes.

221. 35% de 208.
222. 28% de 531.
223. 45% de 1.050.
224. 96% de 1.800.
225. 51% de 5.320.
226. 85% de 2.120.

R Lee cada enunciado. Luego, describe un procedimiento sencillo y práctico para calcular el porcentaje dado.

227. El 50% de una cantidad.
228. El 25% de una cantidad.
229. El 1% de una cantidad.
230. El 10% de una cantidad.
231. El 20% de una cantidad.

A Lee las siguientes afirmaciones. Luego, determina si son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

232. Si realizo una compra con un 12% de descuento, pago el 88% del precio total del artículo.
233. Al comer las tres cuartas partes de una pizza, solo queda el 20% de la pizza.
234. Si gasto el 90% de mis ahorros, me queda la décima parte de lo que había ahorrado.

S Lee y resuelve.

El IVA o Impuesto al Valor Agregado es un impuesto indirecto sobre el consumo, financiado por el consumidor. El IVA tiene una tarifa básica en Colombia del 16% para algunos artículos.

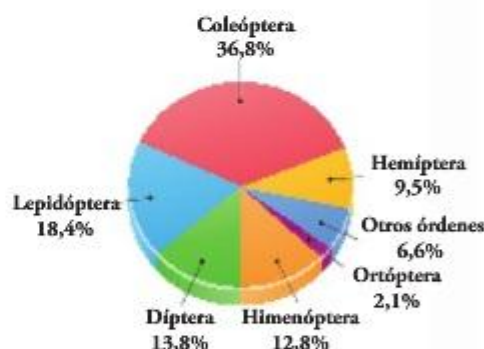
235. Calcula el valor total que se debe pagar por un plan pospago de telefonía celular de \$45.000 sin IVA.

La retención en la fuente es un pago anticipado de un impuesto. Hay retención en la fuente para el impuesto de renta, impuesto de timbre, de industria y comercio, entre otros.

236. Si la retención en la fuente por la venta de un vehículo es del 1%, calcula la retención por la venta de un auto cuyo valor dado por el Ministerio de transporte es de \$9.500.000.

S Observa, lee y responde.

La siguiente gráfica muestra el porcentaje de especies en los principales órdenes de insectos.



237. Si se conocen cerca de un millón de especies de insectos, ¿cuántas especies hay en cada orden de insectos?

S Lee y resuelve.

238. El precio de un artículo se incrementa en total un 61%, después de dos aumentos. Si el primer aumento fue del 15%, ¿cuánto es el segundo aumento?
239. Una tienda de ropa anunció una rebaja del 25% en todos sus productos, pero antes de esa rebaja incrementó sus precios en un 20%. ¿Cuál es el descuento real que está aplicando a sus productos?



4.6 Intereses

En economía y finanzas, las personas, empresas o entidades financieras que realizan una inversión o que ahorran dinero en una entidad, esperan recuperar su dinero con una ganancia correspondiente a una fracción del dinero ahorrado de acuerdo con unas condiciones previamente establecidas. Por otro lado, las entidades que prestan dinero esperan la devolución del mismo, junto con una fracción de este como compensación por el tiempo de uso y por los riesgos del pago oportuno del préstamo, además el dinero tiene una menor capacidad de compra debido a la inflación.

El **interés** es la cantidad de dinero que se obtiene como beneficio al invertir dinero, o también es la cantidad de dinero que se debe pagar por pedir prestado dinero.

Para calcular los intereses se tienen en cuenta cinco elementos:

- **Capital:** cantidad de dinero que se presta o se invierte. Se simboliza con la letra c .
- **Rata o tasa de interés:** razón correspondiente al dinero que se cobra o se paga por cada \$100 de capital en la unidad de tiempo. Generalmente, se expresa como un porcentaje y se simboliza como r .
- **Interés:** dinero que se debe pagar por un ahorro o por un préstamo. Se simboliza con la letra i .
- **Tiempo:** duración de la inversión o préstamo, se representa con la letra t .
- **Monto:** la suma del capital con la cantidad de interés, se representa con la letra m .

Interés simple Actividad

El interés simple es un tipo de interés que calcula los intereses de un período de tiempo sobre el capital, sin tener en cuenta los intereses generados en el período anterior. Es decir, el interés simple siempre se calcula sobre el capital inicial, sin capitalizar los intereses, de manera que los intereses generados no se acumulan al capital para el cálculo de los intereses del siguiente período, por lo que el capital permanece siempre fijo.

Para resolver problemas de interés simple se aplica la regla de tres compuesta donde el interés es directamente proporcional al capital y al tiempo.

Por ejemplo, para calcular el interés simple producido por el ahorro de \$1.200.000 durante 2 años a una tasa de interés del 4% anual, se usa una regla de tres compuesta. Así:

Como la tasa de interés de 4% significa que se reciben \$ 4 por cada \$100, entonces la tabla que relaciona las magnitudes es:

Interés	Capital	Tiempo (años)
4	100	1
i	1.200.000	2

Sea i el interés producido. Además, como el interés es directamente proporcional al capital y al tiempo, se establece la proporción:

$$\frac{4}{i} = \frac{100}{1.200.000} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{Se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta.}$$

$$\frac{4}{i} = \frac{100}{2.400.000} \quad \text{Se realiza la multiplicación.}$$

$$i = \frac{2.400.000 \times 4}{100} = \frac{9.600.000}{100} = 96.000 \quad \text{Se despeja } i, \text{ se multiplica y se simplifica.}$$

Por tanto, el interés producido por \$1.200.000 al 4% anual durante 2 años es de \$96.000.

Historia de las matemáticas

Matemática financiera



El origen del préstamo con interés se remonta a la Edad Media.

La aritmética mercantil moderna se originó en Europa durante la época del Renacimiento. Las primeras clasificaciones de los problemas comerciales según el tipo de tratamiento aritmético que requieren se deben a matemáticos italianos como Leonardo de Pisa y Luca Pacioli.

Matemáticamente

Explica las relaciones de proporcionalidad involucradas en problemas de interés simple.

**Recuerda que...**

El período de interés (que se menciona en la tasa de interés) y el tiempo deben estar expresados en la misma unidad de tiempo.

EJEMPLOS

1. Marina pagó \$36.000 de interés por un préstamo a una tasa de interés de 8% de interés simple anual, durante 6 meses. ¿Cuál fue el monto de dinero del préstamo?

Si c es el capital invertido, se organiza la información en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la tasa de 8% anual, significa que Marina paga \$8 por cada \$100, además se considera 1 año como 12 meses.

Interés	Capital	Tiempo (meses)
8	100	12
36.000	c	6

Como el capital es inversamente proporcional al tiempo y es directamente proporcional al interés, se tiene la siguiente tabla:

$$\frac{100}{c} = \frac{8}{36.000} \cdot \frac{6}{12}$$

Se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta.

$$\frac{100}{c} = \frac{48}{432.000}$$

Se resuelven las operaciones indicadas.

$$c = \frac{432.000 \times 100}{48} = \frac{43.200.000}{48}$$

Se despeja c y se multiplica.

$$c = 900.000$$

Se simplifica.

Por tanto, el capital del préstamo de Marina fue de \$900.000.

2. Julián dispone de \$5.000.000 para invertir en un fondo que paga el 10% de interés simple anual. ¿Cuánto tiempo debe dejar su dinero en el fondo para recibir \$250.000 de intereses?

Si t es el tiempo de la inversión, se organiza la información en la siguiente tabla, teniendo en cuenta que la tasa de 10% anual, significa que Julián recibe \$10 por cada \$100, además se considera 1 año como 12 meses.



Interés	Capital	Tiempo (meses)
10	100	12
250.000	5.000.000	t

Como el tiempo es directamente proporcional al interés y es inversamente proporcional al capital, se tiene:

$$\frac{12}{t} = \frac{10}{250.000} \cdot \frac{5.000.000}{100}$$

Se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad compuesta.

$$\frac{12}{t} = \frac{50.000.000}{25.000.000}$$

Se resuelven las operaciones indicadas.

$$t = \frac{25.000.000 \times 12}{50.000.000} = \frac{300.000.000}{50.000.000}$$

Se despeja c y se multiplica.

$$t = 6$$

Se simplifica.

Por tanto, Julián debe dejar su dinero 6 meses en el fondo para recibir \$250.000 de intereses.

Matemáticamente

Determina la tasa de interés mensual a la que deben invertirse \$1.000.000 para que en 5 años se obtenga un monto igual al doble del capital.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Responde. Explica tu respuesta con ejemplo.

240. ¿Cuál es la diferencia entre interés y tasa de interés?
241. ¿Cómo se halla la tasa de interés mensual?
242. ¿Existe otra forma diferente para resolver problemas relacionados a interés simple?

R Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

243. El interés es directamente proporcional al capital. ()
244. El interés es inversamente proporcional al tiempo. ()
245. A mayor capital, mayor es el tiempo manteniendo el interés constante. ()
246. Para hallar el interés simple de un crédito se usa una regla de tres compuesta. ()

A Lee y responde. Luego, explica.

247. ¿Qué se debe hacer con el tiempo, en la regla de tres compuesta, si el interés dado es 10% anual y el plazo en que se paga es de 2 años, 3 meses y 12 días?

E Completa la tabla de regla de tres compuesta para cada situación.

248. Samuel hace un préstamo de \$20.000.000 al 11,5% anual, durante dos años y tres meses.

Capital	Interés	Tiempo

249. Alejandra invierte \$1.800.000 en un fondo que paga un interés de 7% anual y lo deja un año, cinco meses y diez días (1 año = 360 días comercialmente).

Capital	Interés	Tiempo

E Halla en cada caso:

250. El interés simple producido por un ahorro de \$3.500.000 al 12% anual durante 8 meses.

251. El interés simple que se debe pagar por un préstamo de \$500.000 con un interés mensual de 0,9% durante 7 meses.

252. El interés simple que se paga por un crédito de \$1.200.000 pagado a 15 meses con un interés del 8,5% anual.

253. El interés que producen \$720.000 prestados al 13% anual en un plazo de 1 año, 2 meses y 10 días (1 año = 360 días comercialmente).

A Lee y responde.

Cuando se hace una inversión a interés simple anual, se puede obtener el capital final mediante la fórmula:

$$m = c + \frac{c \cdot r \cdot t}{100}$$

Donde: c es el capital, $r\%$ es la tasa de interés anual y t es el tiempo en años.

254. ¿Cómo se obtiene la anterior fórmula del monto?

255. Si el tiempo t está dado en meses, ¿cuál es la fórmula en este caso?

256. Usa la fórmula para completar la tabla, si se sabe que un capital de \$2.000.000 se invierte durante 4 años a un interés simple del 20% anual.

R Completa la información de cada situación. Luego, plantea una pregunta de interés simple y resuélvela.

257. Un capital estuvo depositado en un banco a una tasa de 18% interés simple anual durante 3 años.

258. Un capital produjo un interés de \$180.000 a una tasa de 12% de interés simple anual.

259. Juan Carlos recibió \$600.000 de interés por un préstamo realizado a su padre durante 12 meses.

S Lee y resuelve.

260. Rocío compró un carro 0 km y le financiaron \$18.500.000 a un interés simple del 12% anual a 2 años. ¿Cuánto dinero pagará de intereses por la financiación?





Este sistema es el más usado en el mundo financiero. Los bancos aplican el interés compuesto en el cálculo de las cuotas de los créditos.

Interés compuesto



En el **interés compuesto**, los intereses obtenidos al final de un período se suman al capital inicial y el monto así obtenido se convierte en el nuevo capital para el cálculo de los intereses en el siguiente período.

Este tipo de interés, al capitalizar los intereses, hace que el valor que se paga por concepto de intereses se incremente con respecto al interés simple, puesto que el capital para el cálculo del interés se incrementa cada período de tiempo.

Considerando un capital inicial c y una tasa de interés r por período de tiempo, los montos conseguidos al final de cada período son los siguientes:

Período	Montos
Inicial	C (el capital inicial)
1	$C_1 = C + i_1 = C + C \cdot r = C(1 + r)$
2	$C_2 = C_1 + i_2 = C_1 + C_1 \cdot r = C_1(1 + r) = C(1 + r) \cdot (1 + r) = C(1 + r)^2$
3	$C_3 = C_2 + i_3 = C_2 + C_2 \cdot r = C_2(1 + r) = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$

Por ejemplo, se adquiere un crédito de \$1.000.000 con un interés compuesto del 2% mensual con 5 meses de plazo.

Mes	Capital	Interés	Deuda
1	1.000.000	20.000	1.020.000
2	1.020.000	20.400	1.040.400
3	1.040.400	20.808	1.061.208
4	1.061.208	21.224	1.082.432
5	1.082.432	21.649	1.104.081

Como se observa, mes a mes el interés se suma al capital y el nuevo interés se calcula sobre el nuevo capital, lo que hace que mes a mes el valor por intereses se incremente.

En conclusión, de un crédito de \$1.000.000 a un interés compuesto de 2% mensual con 5 meses de plazo se deben pagar \$1.104.081.

Después de t periodos, el monto final m , se calcula mediante la fórmula:

$$m = c(1 + r)^t$$

Donde c es el capital inicial, r es la tasa de interés por período, y t es el número de periodos.

Ahora, con el ejemplo anterior, al aplicar esta fórmula, se tiene:

$$m = 1.000.000(1 + 0,02)^5$$

$$m = 1.000.000(1,02)^5$$

$$m \approx 1.104.081$$

Por tanto, se deben pagar \$1.104.081.

En el interés compuesto, es importante aclarar cada cuánto tiempo se capitalizan los intereses. Por ejemplo, una tasa anual equivalente del 18% se puede capitalizar mensualmente.

En este caso, la tasa de interés mensual es de: $i = \frac{18\%}{12} = 1,5\%$

En este caso, los periodos de interés son meses y el tiempo t hay que medirlo en meses.

Recuerda que...

Un porcentaje se puede expresar como una fracción y como un número decimal.

Por ejemplo:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35$$



EJEMPLOS

1. Calcular el monto final si se depositan \$2.500.000 en una cuenta de ahorros que paga el 18% anual capitalizable durante 3 años.

Primero, se identifican los datos:

$$c = 2.500.000 \quad i = 18\% = \frac{18}{100} = 0,18 \quad t = 3$$

Luego, se calcula el monto final, así:

$$m = c(1 + i)^t \quad \text{Se aplica la fórmula.}$$

$$m = 2.500.000(1 + 0,18)^3 \quad \text{Se reemplazan } c, i \text{ y } t.$$

$$m = 2.500.000(1,18)^3 \quad \text{Se suma.}$$

$$m = 4.107.580$$

Por tanto, el monto final es de \$4.107.580.

2. ¿Cuánto se debe invertir hoy si se desea disponer dentro de 3 años de 4.500 dólares para comprar un automóvil? Considera que el dinero se puede invertir al 14,8% anual capitalizable semestralmente.

Primero, se identifican los datos:

$$m = 4.500$$

Como 1 año equivale a 2 semestres, entonces, se tiene:

$$\begin{aligned} r &= \frac{14,8\%}{2} = 7,4\% \\ &= \frac{7,4}{100} \\ &= 0,074 \end{aligned}$$

$$t = 3 \text{ años} = 6 \text{ semestres}$$

Luego, se calcula el capital, así:

$$m = c(1 + r)^t \quad \text{Se aplica la fórmula.}$$

$$4.500 = c(1 + 0,074)^6 \quad \text{Se reemplazan } m, r \text{ y } t.$$

$$4.500 = c(1,074)^6 \quad \text{Se suma.}$$

$$c = \frac{4.500}{(1,074)^6} \quad \text{Se despeja } c.$$

$$c = 2.932,15$$

Por tanto, se deben invertir 2.932,15 dólares.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Razono • Soluciono problemas

Explica.

261. La diferencia entre el interés simple y el interés compuesto.
262. Si se hace un préstamo a interés simple anual del 12% a dos años y un préstamo a un interés compuesto del 12% anual a dos años también, capitalizable mensualmente, ¿en cuál préstamo se paga más?

Completa la tabla, según la información dada.

263. Un préstamo de \$5.000.000 a 3 años con un interés compuesto de 7% anual.

Año	Préstamo	Interés	Valor a pagar
1			
2			
3			

264. Una inversión de \$3.000.000 durante dos años, con el 12% de interés compuesto anual.

Año	Capital	Interés	Capital final
1			
2			

Lee y responde. Justifica tu respuesta.

265. ¿Qué cantidad de dinero debe invertirse al 40% anual capitalizable trimestralmente para obtener \$3.327.500 después de 9 meses?
266. ¿Cuánto más se debe pagar por un préstamo de \$10.000.000 a un interés del 5% mensual a interés compuesto por 3 meses, que por el mismo préstamo a interés simple con la misma tasa de interés y tiempo?

Lee y resuelve.

267. ¿Cuál será el capital final al invertir un capital inicial de \$10.000.000 a un interés compuesto del 5% mensual durante 4 meses.
268. Se tiene una obligación bancaria de \$20.736.000 que será liquidada dentro de 4 años. ¿Cuánto se debe invertir hoy al 20% anual, con el fin de cumplir con el pago de la deuda?
269. Liliana tiene un crédito de \$1.000.000 a una tasa de interés compuesto mensual del 3% con un plazo de 3 meses. ¿Cuánto deberá pagar de intereses por el crédito?

- Andrés realiza la medición del perímetro y el diámetro de varias circunferencias. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

Diámetro (cm)	5	10	15	20	25
Perímetro (cm)	15,7	31,4	47,1	62,8	78,5

- 290.** Representa gráficamente los datos en tu cuaderno.

- 291.** Determina si las magnitudes son directamente proporcionales.

- 292.** Halla el valor de la constante de proporcionalidad.

- 293.** Encuentra la expresión matemática que relaciona las magnitudes.

- 294.** Halla el valor del perímetro de las circunferencias cuyos diámetros son 2 cm, 12 cm y 30 cm.

Magnitudes inversamente proporcionales

- 295.** Determina la constante de proporcionalidad inversa y completa la tabla.

Pintores		3		6
Tiempo (días)	24	16	12	

-  Escribe una expresión que relacione cada una de las siguientes situaciones. Luego, elabora una tabla y una gráfica que describan la situación.

- 296.** Si se reparten 40 balones entre 10 niños, a cada niño le corresponden 4 balones. Si se deben repartir los mismos balones entre 20 niños, a cada uno le corresponderán 2 balones.

- 297.** En una carretera de 72 km se van a instalar peajes, separados entre sí por la misma distancia. Si se ponen 4 peajes, la distancia entre peajes es 18 km. Si son 6 peajes, la distancia es 12 km.

Aplicaciones de la proporcionalidad

- Lee y resuelve.

- 298.** Si un murciélago consume, aproximadamente, 1.000 insectos en dos horas, ¿cuántos puede llegar a comer en seis horas y media?

- 299.** Una excursión de 60 personas lleva provisiones para 15 días. Si se encuentran con 15 personas que perdieron los alimentos, ¿cuántos días podrán quedarse hasta terminar sus provisiones?

- 300.** Para copiar las memorias de un evento se contratan 5 secretarías que trabajan 8 horas diarias y copian 600 páginas. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar 8 secretarías para copiar un libro de 1.200 páginas en el mismo tiempo?

-  Realiza los siguientes repartos.

- 301.** Reparte 154 en partes directamente proporcionales a $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{6}$.

- 302.** Reparte 8 en partes inversamente proporcionales a $1\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{4}$ y 2.

Calcula los porcentajes indicados.

- 303.** El 35,5% de 2.000.

- 304.** El 21% de 3.450.



PROBLEMAS PARA REPASAR

Muchas máquinas usan sistemas de ruedas dentadas llamadas trenes de engranajes. La rueda que produce el movimiento es llamada rueda motora. El engranaje está formado por tres ruedas dentadas, la rueda 1 que es la rueda motora tiene 32 dientes, la rueda 2 tiene 16 dientes y la rueda 3 tiene 8 dientes.

Si la rueda motora da 16 vueltas ¿cuántas vueltas dan las ruedas 2 y 3?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuántas vueltas dan las ruedas 2 y 3?

¿Cuáles son los datos del problema?

La rueda 1 es la rueda motora y tiene 32 dientes.

La rueda 2 tiene 16 dientes.

La rueda 3 tiene 8 dientes.

La rueda motora da 16 vueltas.

Paso 2 Elabora un plan y luego llévalo a cabo.

Primero, se establece la relación entre las magnitudes, la cantidad de dientes de las ruedas es inversamente proporcional a la cantidad de vueltas que ellas puedan dar.

Segundo, se organizan los datos en tablas de regla de tres simple inversa para cada rueda, teniendo en cuenta que:

x : cantidad de vueltas que da la rueda 2.

y : cantidad de vueltas que da la rueda 3.

Rueda 2

Cantidad de dientes	Cantidad de vueltas
32	16
16	x

Rueda 3

Cantidad de dientes	Cantidad de vueltas
32	16
8	y

Tercero, se aplica la propiedad fundamental de la proporcionalidad inversa para establecer las proporciones correspondientes a cada rueda. Así:

Rueda 2:

$$\frac{32}{16} = \frac{x}{16}$$

Se plantea la proporción.

$$x = \frac{32 \cdot 16}{16} = 32$$

Se despeja y se simplifica.

$$x = 32$$

Rueda 3:

$$\frac{32}{8} = \frac{y}{16}$$

Se plantea la proporción.

$$y = \frac{32 \cdot 16}{8} = 64$$

Se despeja y se simplifica.

$$y = 64$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Una vez se ha verificado que las operaciones están correctamente realizadas, se puede concluir que la rueda 2 da 32 vueltas y la rueda 3 da 64 vueltas.

- 305.** Los lados a y b de los hexágonos regulares están en razón 2 a 5. Si el perímetro del hexágono exterior mide 60 cm, ¿cuánto mide el lado del hexágono interior?



- 306.** Un poste produce una sombra de 4,5 m. Si un arbusto de 0,8 m que está a su lado proyecta al mismo tiempo, una sombra de 1 m, ¿cuál es la altura del poste?

[illegible]

Usa la siguiente información para resolver los ejercicios 307 al 309.

En Marte, debido a la gravedad, el peso de una persona es tres quinceavos de su peso en la Tierra.

- 307.** ¿Cuál es el peso en Marte de una persona de $48 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ en la Tierra?

[illegible]

- 308.** ¿Cuál es el peso de una persona en la Tierra si en Marte pesa $11,3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$?

- 309.** Grafica la relación entre el peso en la Tierra y el peso en Marte.

- 310.** Jorge depositó \$3.000.000 en un banco a interés simple durante un tiempo y obtuvo \$45.000 de interés.

Carlos depositó \$2.500.000 en otro banco durante el mismo tiempo que Jorge, y obtuvo \$30.000 de interés. ¿Cuál de los dos bancos ofrece un interés mayor? ¿Cómo lo sabes?

- 311.** ¿Cuánto dinero tenía Luisa si gastó el 80% y aún le quedan \$40.000?

- 312.** Gabriel tenía \$800.000. Si gastó el 20% y dio a su hermana el 15% de lo que le quedó, ¿cuánto dinero tiene ahora?

- 313.** ¿Cuánto se debe invertir ahora para obtener \$1.000.000 de intereses dentro de 10 meses al 2,5% mensual de interés simple?

- 314.** ¿Cuánto dinero, por concepto de intereses, es obtenido por un capital de \$3.000.000, durante dos años, con el 12% de interés compuesto anual?

[illegible]

...Para encontrar relaciones entre las medidas corporales.

La antropometría es una rama de la antropología biológica que se encarga de estudiar las medidas del cuerpo humano y las relaciones que existen entre ellas. Estas medidas pueden variar dependiendo la raza, la sexo, la alimentación, entre otros. Las medidas antropométricas estándar no pueden ser constantes, es necesario modificarlas con el pasar del tiempo debido al cambio morfológico que ha tenido el cuerpo humano a través de la historia, entonces, se hace necesario realizar estudios continuamente al respecto.

Existen dos tipos de medidas antropométricas que son:



Estructurales: son aquellas de longitudes del cuerpo estático como longitud de las extremidades o el diámetro de la cabeza.

Funcionales: son medidas tomadas durante el movimiento de la persona. Son muy utilizadas en los deportistas de alto rendimiento.



Mediante las proporciones se puede obtener el índice relativo de la extremidad superior (IRES) que compara la longitud del brazo y la estatura de una persona mediante la siguiente expresión.

$$\frac{\text{IRES}}{100} = \frac{\text{Long. ext. sup. (cm)}}{\text{Estatura (cm)}}$$

Donde la longitud de la extremidad superior se mide desde el hombro hasta el dedo más largo de la mano, como se muestra en la figura.

Luego, la expresión para determinar el IRES es:

$$\text{IRES} = \frac{\text{Long. ext. sup. (cm)}}{\text{Estatura (cm)}} \times 100$$

A partir del resultado obtenido se puede clasificar la extremidad superior de un adulto hombre en tres sujetos diferentes que son:

- Braquibraquial: extremidades superiores cortas con un valor máximo de 44,9.
- Mesobraquial: Extremidades superiores intermedias con un valor entre 45 y 46,9.
- Macrobraquial: Extremidades superiores largas con un valor superior a 47.

Por ejemplo, si un adulto tiene una extremidad superior de 81,6 cm y mide 180 cm, el índice relativo de extremidad superior es:

$$\text{IRES} = \frac{81,6}{180} \times 100$$

$$\text{IRES} = 45,3$$

Lo que indica que es un sujeto mesobraquial con extremidades superiores intermedias.

1. ¿Por qué crees importante encontrar relaciones entre las medidas corporales de una persona?
2. Completa la siguiente tabla.

Long. ext. sup. (cm)	Estatura (cm)	IRES	Sujeto
80,2	175		
	185	48	
83		47,2	
79	178,6		
	192		Macrobraquial
	160		Braquibraquial

3. ¿Cuál debería ser la medida de la extremidad superior de una persona de 170 cm de altura, para estar en el rango mínimo de un sujeto mesobraquial?
4. Toma las medidas de estatura y de la longitud de la extremidad superior de 5 personas adultas. Luego, clasifícalas según su índice relativo de la extremidad superior (IRES).

...También sirve para optimizar la producción en una empresa.

La producción es un factor de suma importancia en cualquier organización, los métodos y estrategias utilizados, hacen que una empresa pueda crecer reduciendo los costos y aumentando las ganancias. La función del departamento de producción en una empresa es planificar, controlar, organizar y mejorar la producción de los bienes y servicios que produce una empresa.



Se pueden encontrar algunas variables utilizadas en la producción que se relacionan entre sí. Ellas son:

Bien o servicio: es el elemento que produce la empresa que puede ser tangible o intangible.

Tiempo: es la duración de la producción de algún bien o servicio.

Personal: cantidad de población necesaria para realizar la producción.

Insumos: materia prima necesaria para ejecutar la producción exitosamente.

Estas variables se pueden relacionar linealmente entre sí y se puede hallar uno de los valores desconocidos en el momento que la producción aumente o disminuya dependiendo el caso, entonces, las reglas de tres simple

y compuesta son necesarias para definir cuánto hay que optimizar la producción y conocer si se necesita más o menos personal, si se requiere hacer la misma producción en menos tiempo, para conocer la cantidad de insumos necesarios para un incremento en la producción, entre otras situaciones que relacionan las cuatro variables nombradas anteriormente.

Por ejemplo, una empresa de bebidas gaseosas en su segundo año de llegada al mercado colombiano producía 190 mil cajas de gaseosa por mes generando 675 empleos directos e indirectos, respectivamente. Para el siguiente año su intención es incrementar su producción en un 5%, entonces se puede encontrar el número de empleos nuevos que generaría.

Primero, se debe hallar el 5% de 190 mil cajas que producen en un mes para saber cuál es su nueva producción mensual.

105% de 190

$$\frac{105}{100} \times 190 = 199,5$$

Luego, la nueva producción mensual es de 199,5 mil cajas de gaseosa.

Ahora, se utiliza la regla de tres simple directa, para conocer el número de empleos nuevos. Teniendo en cuenta que si con la producción anterior había 675 empleos, entonces, se tiene que:

$$\frac{190}{199,5} = \frac{675}{x}$$

Al despejar x , se sigue:

$$x = \frac{199,5 \times 675}{190} = 708,75 \approx 709$$

Por tanto, la empresa de gaseosas generaría aproximadamente 709 empleos. Es decir, 34 empleos más que el año anterior.

1. ¿Qué importancia tiene conocer los números exactos de las variables nombradas en la producción de un bien o servicio?
2. Una empresa de juegos didácticos necesita 24 empleados que trabajen 8 horas diarias para producir 300 unidades. Si requiere producir 500 unidades trabajando 10 horas diarias, ¿cuántos empleados se necesitan?
3. En una empresa muy importante de productos lácteos, de un litro y medio de leche, se pueden generar 100 gramos de queso, ¿cuánta leche se necesita para producir 175 gramos de queso?
4. Consulta el crecimiento en la producción de una empresa. Luego, con ayuda de la regla de tres, pronostica los nuevos empleos que puede generar la empresa.

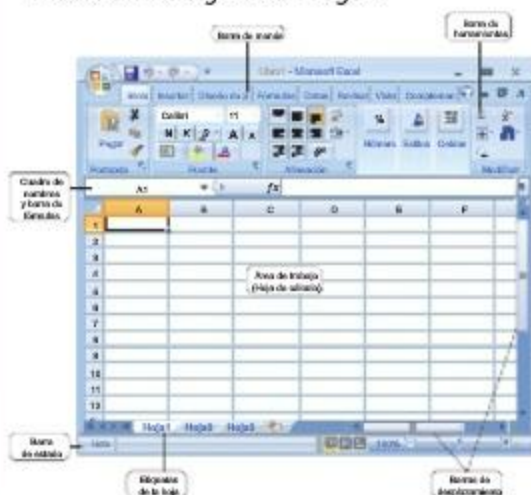
Trabaja con Excel

Objetivo: establecer la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes y determinar el valor de cantidades desconocidas en situaciones relacionadas a porcentajes.

Descripción: comparar dos magnitudes a partir de la organización de los datos en una tabla y calcular las cantidades desconocidas en ejercicios de porcentaje.

Activa Microsoft Excel.

- 1 Luego, visualiza la planilla de cálculos de Excel con sus diversas herramientas, como se muestra en la siguiente imagen.



- 2 Para comprobar si la magnitud A presenta algún tipo de proporcionalidad con las magnitudes B, C y D, que se muestran a continuación,

Magnitud A	2	5	13
Magnitud B	0,5	1,25	3,25
Magnitud C	4	7	15
Magnitud D	26	10,4	4

se copia la tabla en la hoja de cálculo en el rango de celdas A1:D4, como se muestra en la figura.

	A	B	C	D	E
1	Magnitud A	2	5	13	
2	Magnitud B	0,5	1,25	3,25	
3	Magnitud C	4	7	15	
4	Magnitud D	26	10,4	4	

- 3 Calcula los cocientes de términos correspondientes escribiendo $=B\$1/B2$ en B6.

	A	B	C	D	E
1	Magnitud A	2	5	13	
2	Magnitud B	0,5	1,25	3,25	
3	Magnitud C	4	7	15	
4	Magnitud D	26	10,4	4	
5					
6	MA/MB	$=B\$1/B2$			
7	MA/MC				
8	MA/MD				

- 4 Copia el contenido de la celda B6. Luego, pega el contenido en las celdas B7:B8, C6:C8 y D6:D8 para completar la tabla. Por tanto, las magnitudes A y B son directamente proporcionales, ya que los respectivos cocientes tienen el mismo valor.

	A	B	C	D	E
1	Magnitud A	2	5	13	
2	Magnitud B	0,5	1,25	3,25	
3	Magnitud C	4	7	15	
4	Magnitud D	26	10,4	4	
5					
6	MA/MB	4,00	4,00	4,00	
7	MA/MC	0,50	0,71	0,87	
8	MA/MD	0,08	0,48	3,25	

- 5 Halla el producto de términos correspondientes escribiendo $=B\$1*B2$ en B10. Luego, pega el contenido en el resto. Por tanto, las magnitudes A y D son inversamente proporcionales, ya que los respectivos productos tienen el mismo valor.

	A	B	C	D	E
1	Magnitud A	2	5	13	
2	Magnitud B	0,5	1,25	3,25	
3	Magnitud C	4	7	15	
4	Magnitud D	26	10,4	4	
5					
6	MA/MB	4,00	4,00	4,00	
7	MA/MC	0,50	0,71	0,87	
8	MA/MD	0,08	0,48	3,25	
9					
10	MA*MB	1	8,25	42,25	
11	MA*MC	8	35	195	
12	MA*MD	52	52	52	

- 6 Calcula las cantidades desconocidas que aparecen en la siguiente tabla.

Cantidad total	250	3.000	<i>c</i>
Tanto por ciento	3	<i>b</i>	5
Parte	<i>a</i>	210	45

- 7 Para determinar *a* copia los datos de la primera columna, y construye la fórmula para calcular la parte del total. Luego, haz clic en intro, como se muestra en la figura.

	A	B	C	D	E
1					
2	Cantidad total	250			
3	Tanto por ciento	3			
4	Parte	7,5	$=B2*B3/100$		
5					
6					

- 8 Para hallar el valor de *b*, introduce los datos de la segunda columna. Luego, construye la fórmula del porcentaje. Por último, haz clic en intro, como se muestra en la figura.

	A	B	C	D	E
1					
2	Cantidad total	250	3000		
3	Tanto por ciento	3	7	$=100*C4/C2$	
4	Parte	7,5	210		
5					
6					

- 9 Para hallar el valor de *c*, copia los datos de la tercera columna. Luego, construye la fórmula para calcular la cantidad total. Por último, haz clic en intro, como se muestra en la figura.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Cantidad total	250	3000	900	$=100*D4/D3$	
3	Tanto por ciento	3	7	5		
4	Parte	7,5	210	45		
5						
6						

- 10 Observa el resultado final de la tabla con los respectivos valores.

	A	B	C	D	E
1					
2	Cantidad total	250	3000	900	
3	Tanto por ciento	3	7	5	
4	Parte	7,5	210	45	
5					
6					

- 11 Determina los valores que se desconocen en la siguiente tabla.

Cantidad total	175	450	<i>c</i>
Tanto por ciento	20	<i>b</i>	7
Parte	<i>a</i>	9	21

	A	B	C	D	E
1					
2	Cantidad total	175	450	300	
3	Tanto por ciento	20	2	7	
4	Parte	35	9	21	
5					
6					

- 12 Para hallar los valores, a partir de la primera hoja de trabajo, escribe encima de las celdas los datos conocidos de la segunda tabla. Así, se obtienen los nuevos resultados, como se muestra en la figura.

- 13 Lee y resuelve aplicando Excel.

- Halla la parte si la cantidad total es 4.507 y el porcentaje es 12.
- Halla el porcentaje si la cantidad total es 1.325 y la parte del total es 318.

- 14 Calcula en Excel:

- El porcentaje en el que se ha aumentado si la cantidad total es 250 y la parte final es 300.
- La cantidad total si la parte del total es 45 y se ha aumentado un 10%.

- 15 Comprueba, con distintos valores, esta propiedad:

Si *A* es directamente proporcional a *B* e inversamente proporcional a *C*, entonces *B* y *C* son directamente proporcionales.

4

Introducción al álgebra

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer las características de las expresiones algebraicas.
- Realizar operaciones aditivas entre expresiones algebraicas.
- Realizar la multiplicación entre expresiones algebraicas.
- Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

- | | |
|--|--|
|  3 Multimedia |  1 Audio |
|  1 Galería |  4 Imprimibles |
|  4 Actividades |  2 Enlaces web |

Lo que sabes...

1. Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(-2)(-3)$	c. $4 \times 3^2 \div 6 + 10$
b. $3^3 - (-2)^4$	d. $7 \times (-9 + 5) \div 2$
2. Escribe los dos números que siguen en estas sucesiones.

a. 8, 11, 14, 17, 20	c. 1, 4, 9, 16, 25
b. 5, 9, 13, 17, 21	d. 3, 6, 12, 24
3. Escribe en notación de potencia, las siguientes expresiones.

a. $2 \times 2 \times 2 \times 2$	c. $n \times n$
b. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$	d. $m \times m \times m$
4. Determina el área de un rectángulo si:
 - a. Su base mide 20 cm y su altura mide 10 cm.
 - b. Su base mide b y su altura mide h .



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para encontrar las dimensiones de una escalera.

Las dimensiones de una escalera deben cumplir con unos requisitos mínimos de seguridad, ya que de otro modo puede ser riesgoso caminar sobre ella. Las escaleras son lugares transitados por niños, ancianos, adultos y jóvenes, por igual, y por ello es importante que cada escalón tenga medidas que ofrezcan fácil acceso y comodidad a cualquier persona.

Con el fin de cumplir con las normas de seguridad para evacuaciones de edificios se han planteado algunas expresiones algebraicas que permiten obtener las medidas proporcionales para cada uno de los escalones de una escalera.

■ Lee más acerca de este tema en la página 172.

Cronología de introducción al álgebra

Babilonia. Se utilizaron expresiones con incógnitas para encontrar valores desconocidos.

2500 a. C.

Egipto. Ahmes escribió el primer texto matemático, conocido como Papiro de Rhind que contiene más de 100 problemas que se refieren a cuestiones de la vida diaria.

1650 a. C.

Asia. Apareció la obra de Al Khwarizmi, matemático, astrónomo y geógrafo persa, considerado como el padre del álgebra.



820 d. C.

250 d. C.

Alejandro. Diofanto introdujo el álgebra llamada sincopada, la cual hace uso de abreviaturas para referirse a las cantidades y operaciones.



1000 d. C.

Uzbekistán. Al Biruni definió parámetros básicos para expresar las cantidades algebraicas.

1570 d. C.

Francia. François Viète contribuyó al desarrollo del álgebra simbólica.



Italia. Marin Mersenne encontró la forma de expresar, de diferentes formas, los polinomios algebraicos.

1641 d. C.



Historia de las matemáticas

Álgebra

El álgebra comienza cuando los matemáticos se interesan por operaciones que se pueden realizar con cualquier número más que por los mismos números, lo que los llevó a generalizar un número cualquiera a través de una letra llamada variable.

Esta permite expresar de manera compacta ideas que, al ser expuestas en palabras, serían demasiado extensas y, por tanto, poco prácticas para su uso.

Por ejemplo, la expresión: "la raíz cuadrada del radio de la circunferencia sumada con el producto de dicho radio por sí mismo es igual al triple del mencionado radio más cinco" se escribe $\sqrt{r} + r^2 = 3r + 5$ gracias a la invención en 1557 del signo $=$ por Robert Recorde, a la invención de la notación $x^2, x^3, \dots$ para las potencias de x por Descartes, a la invención en 1525 del signo $\sqrt{}$ por Christoph Rudolff.



1. Expresiones algebraicas



Una de las características del álgebra es su capacidad de abstracción, utilizada en la resolución de problemas. Por ejemplo, considérense las tres situaciones:

En un corral hay 5 ovejas y en otro 9. ¿Cuántas ovejas hay en total?

En un corral hay 8 ovejas y en otro 3. ¿Cuántas ovejas hay en total?

En un corral hay 367 ovejas y en otro 496. ¿Cuántas ovejas hay en total?

Se podría pensar que, en algún sentido, se trata del mismo problema. La solución de los tres problemas es idéntica: se llega a ella sumando el número de ovejas en cada corral.

Por tanto, el esquema de solución es independiente de la cantidad de ovejas presentes en cada corral. Es decir, se emplean "cantidades en un sentido amplio". En este caso, se pueden enunciar los tres problemas en un solo esquema, como sigue: en un corral hay n ovejas y en otro m , ¿cuántas ovejas hay en total? Así la cantidad total de ovejas está dada por $n + m$.

Lo anterior, se logra debido al lenguaje convencional usado en álgebra. Este lenguaje permite un acuerdo entre los participantes acerca del significado de los signos y las reglas empleadas.

Por ejemplo, en español la combinación de letras "perro" tiene un significado, que no tiene en otros idiomas, en los cuales para representar la misma idea emplean otra combinación de letras (por ejemplo *dog*, en inglés).

De este modo, es necesario que exista un acuerdo en el significado que se le asigna a m y a n . Luego, se entenderá entonces, que m y n son signos que representan las diferentes cantidades de ovejas presentes en cada corral. Además, no todo número es un valor posible para m y n . Por ejemplo, no tiene sentido pensar que n sea igual a -3 o que m sea igual a $\frac{1}{2}$. Los valores válidos para n y m son únicamente números naturales y $m + n$ representa la suma de los valores que en algún caso particular asuman n y m . La expresión del tipo $n + m$ se llama una **expresión algebraica**.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras y signos por medio de una o varias operaciones.

Una expresión algebraica está formada por **términos**, así la expresión $3x^2y^3 - 7x^3y^2$ la conforman los términos $3x^2y^3$ y $-7x^3y^2$. Un término está compuesto por los siguientes elementos:

- **Signo:** puede ser $+$ o $-$. Si el término es positivo, se omite el símbolo que lo precede. Así, los términos $14m^2n$ o $7wz$ son términos positivos. En cambio, los términos $-23ab^3$ o $-29xy$ son términos negativos.
- **Coficiente:** es el número racional que aparece en cada término. Por ejemplo, en el término $3a$ el coeficiente es 3 y en el término xy el coeficiente es 1.
- **Exponente:** es el número que indica la cantidad de veces que se multiplica cada variable. Por ejemplo, en el término $8n^2$ el exponente de n es 2, el cual indica que el valor que representa n se multiplica dos veces, es decir, $(n)(n) = n^2$.
- **Parte literal:** corresponde a la letra o grupo de letras con sus respectivos exponentes. Así, en el término $-6abc$, la parte literal es abc , donde el exponente de cada variable es 1.



1.1 Clasificación de expresiones algebraicas



Actividad



Ampliación multimedia

La siguiente tabla muestra la clasificación de las expresiones algebraicas.

Expresiones algebraicas		
Clasificación	Definición	Ejemplos
Monomio	Es una expresión algebraica que consta de un solo término.	$4x^2y$; $-\frac{1}{5}m^3n^2o$
Binomio	Es una expresión algebraica que consta de dos términos.	$8a + 7b$; $-\frac{7}{2}x^2 + y^3$
Trinomio	Es una expresión algebraica que consta de tres términos.	$3x^2y + 4x^3y + 8x$; $\frac{1}{5}m^2no + \frac{3}{8}mno + \frac{2}{7}mn$
Polinomio	Es una expresión algebraica que consta de más de un término.	$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$; $-x^2 + x + y$

Matemáticamente

¿Cuál es el intruso?

$$-5a^3 + 7b^8$$

$$-\frac{2}{3}xy - \frac{4}{3}xy$$

$$2xy^{-2} - \frac{3}{5}x^{-1}y^2$$

$$-3a^0 + \frac{1}{3}b^5$$

Los exponentes de la parte literal deben ser números positivos.

1.2 Términos semejantes



Ampliación multimedia

Dos o más términos son semejantes cuando su parte literal con sus respectivos exponentes son iguales.

Por ejemplo, los términos $8a^4b^3c^2$ y $-7a^4b^3c^2$ son semejantes porque la parte literal con sus respectivos exponentes son iguales, así: $a^4b^3c^2 = a^4b^3c^2$, sin importar los coeficientes y signo que acompañan a cada expresión.

EJEMPLOS

1. Clasificar las siguientes expresiones algebraicas según el número de términos:

a. $x^2y^3 + xy^2$

c. $4x^3 + 2x^2 + x + 1$

b. $\frac{1}{4}x^5y^6z^7$

d. $-x^3 + y^2 + z^5$

Para clasificar las anteriores expresiones se cuentan los términos que constituyen cada expresión algebraica, así:

- La expresión $x^2y^3 + xy^2$ tiene dos términos, por tanto, es un binomio.
- La expresión $\frac{1}{4}x^5y^6z^7$ tiene un solo término, por tanto, es un monomio.
- La expresión $4x^3 + 2x^2 + x + 1$ tiene más de dos términos, luego es un polinomio.
- La expresión $-x^3 + y^2 + z^5$ tiene tres términos, por tanto, es un trinomio.
- Las expresiones que están en los literales a, c y d son también polinomios, ya que constan de más de un término.

2. Identificar si los términos $-5x^3y^2z$, $4x^3zy^2$ y $-3zx^3y^2$ son semejantes.

Se identifica la parte literal y los exponentes de cada letra de tal forma que coincidan. La parte literal de cada monomio es x^3y^2z . Por tanto, los monomios son semejantes.

3. Determinar si los siguientes términos son semejantes a la expresión $-4x^2y^2z^3$.

$$-x^2z^3y^2$$

$$-\frac{1}{2}z^3y^3x^2$$

$$7x^2z^3y^2$$

Primero, se identifica la parte literal del monomio $-4x^2y^2z^3$ que es $x^2y^2z^3$.

Luego, se compara con la parte literal de los otros monomios. En consecuencia, los monomios semejantes a la expresión dada son $-x^2z^3y^2$ y $7x^2z^3y^2$.



1.3 Valor numérico



Recurso
imprimible

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el valor que se obtiene al efectuar las operaciones entre los valores numéricos que se asignan a cada variable.

Por ejemplo, para calcular el valor numérico de la expresión $5b^2 - 3a$ cuando $a = 3$ y $b = 2$ se realizan los siguientes pasos:

$$5(2^2) - 3(3) \quad \text{Se reemplaza el valor de } a \text{ y el valor de } b.$$

$$= 5(4) - 3(3) \quad \text{Se resuelve la potencia.}$$

$$= 11 \quad \text{Se multiplica y se resta.}$$

Así, el valor numérico del binomio $5b^2 - 3a$ cuando $a = 3$ y $b = 2$ es 11.

EJEMPLOS

1. Calcular el valor numérico del trinomio $5x + 2y^2 + 3$ si $x = -1$ y $y = 2$.

Se realizan los siguientes pasos:

$$5x + 2y^2 + 3 \quad \text{Trinomio.}$$

$$5(-1) + 2(2^2) + 3 \quad \text{Se reemplaza el valor de } x \text{ y el valor de } y.$$

$$= -5 + 8 + 3 \quad \text{Se multiplica.}$$

$$= 6 \quad \text{Se suman los números enteros.}$$

Por tanto, el valor numérico del trinomio $5x + 2y^2 + 3$ cuando $x = -1$ y $y = 2$ es 6.

2. El tiempo que emplea una piedra al caer por un barranco es igual a la raíz cuadrada de la razón entre el doble de la altura del barranco y 9,8.

- a. Escribir la expresión que permite calcular el tiempo que tarda la piedra en caer por el barranco.

Primero, se tiene que h es la altura del barranco.

Luego, la razón entre el doble de la altura del barranco y 9,8 es $\frac{2h}{9,8}$.

Finalmente, se tiene que el tiempo que tarda la piedra en caer por el barranco está dado por la expresión

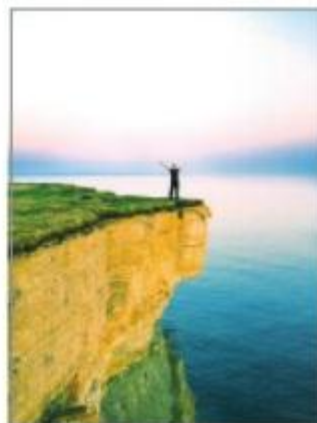
$$t = \sqrt{\frac{2h}{9,8}}$$

- b. Calcular el tiempo que tarda en caer una piedra desde un barranco de 12 m de altura.

Se halla el valor numérico del monomio $\sqrt{\frac{2h}{9,8}}$ cuando $h = 12$. Luego, se tiene que:

$$\sqrt{\frac{2(12)}{9,8}} \approx 1,56$$

Por tanto, la piedra tarda cerca de 1,56 segundos en caer.





Afianza COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

I Subraya las expresiones que son algebraicas.

- $x^3 + 2y + 5$
- $3 + 4^2 \times 5 \div 80$
- $\frac{1}{2} + b^2 + c^2 + 3ab$
- $(-4 + \sqrt{3})(8 + \sqrt{5})$
- $(3x^2 + x + 1)(4x)$
- $9 + 3 \div 1 \times \sqrt{25} + \text{Log}_2 8$

I 7. Completa la siguiente tabla.

Expresión algebraica	Coficiente	Signo	Parte literal
$-5x^2y^2z$			
$4abc$			
$-m^2n^3$			
$-\frac{1}{2}p^3q^2r$			
$\frac{5}{3}r^4s^5t^2$			

I Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en monomio, binomio, trinomio y polinomio.

- $-5m^8n^5 + n^2$
- $3x^9 + 8x^8 + 8x^6 + 5$
- $\frac{3}{5}m + \frac{2}{3}n$
- $-5a$
- $8x^3 + 4x + 3$

V Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

- Tres es un monomio. ()
- Un polinomio tiene máximo tres términos. ()
- El exponente en un monomio es siempre mayor que uno. ()
- $3x + 1$ es un binomio. ()
- Dos términos semejantes no pueden tener el mismo coeficiente. ()

M Escribe una expresión algebraica para cada enunciado.

- El triple de la suma de tres números.
- La suma de tres números consecutivos.

P Escribe dos expresiones algebraicas que cumplan cada una de las siguientes condiciones.

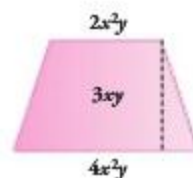
- Es un binomio cuyos términos son semejantes y tienen parte literal x^2yz^3 .
- Es un trinomio en el que el primer y el segundo términos son semejantes, el tercer término es negativo y la suma de los exponentes de su parte literal es 3.

E Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, si $a = -2$, $b = -1$ y $c = 3$.

- $a^2 - 3b$
- $5a^3 - 6c + 1$
- $2a + 5b - 2$
- $4b^2 + 10c + a$
- $b^3 - a^2 + 2b - 1$
- $-c^3 + 9a^2 - 2ab$

R El área de un trapecio está dada por la expresión $b \cdot \left(\frac{B+b}{2}\right)$,

donde b es la altura, B es la medida de la base mayor y b la medida de la base menor.



En el siguiente trapecio isósceles los valores de x y y son 3 y $\frac{1}{2}$, respectivamente.

- ¿Cuáles son las dimensiones del trapecio?
- ¿Cuál es el área del trapecio?

R Responde las preguntas de acuerdo con la siguiente sucesión de términos.

$3a, 7a, 11a, 15a, \dots$

- Si $a = 3$, ¿cuál es el término 10?
- Si $a = -1$, ¿cuál es el término 30?

S El volumen de una pirámide se calcula mediante la expresión:

$\frac{A_b \cdot h}{3}$, donde A_b es el área de la base y h es la altura.



- Si en una pirámide la altura es 5 cm y el área de la base es 16 cm², ¿cuál es el volumen de la pirámide?
- Si la base de la Pirámide Roja de Egipto tiene 221,5 m de largo y 218,5 m de ancho, ¿cuál es su volumen, si su altura es de 104,4 m?



Enlace web



2. Operaciones entre expresiones algebraicas

Entre expresiones algebraicas también se pueden efectuar las mismas operaciones que se realizan en los distintos conjuntos numéricos: adición, sustracción, multiplicación y división.

2.1 Adición y sustracción



Actividad



Recurso imprimible

Recuerda que...

Para eliminar un paréntesis se debe tener en cuenta:

Si está precedido por el signo $+$, se quitan los paréntesis sin modificar los signos de los términos que están dentro del paréntesis.

Si está precedido por el signo $-$, se cambian los signos de los términos que están dentro del paréntesis y se quitan los paréntesis. El polinomio que se obtiene se le llama *polinomio opuesto*.

Para sumar o restar expresiones algebraicas es necesario aplicar la **reducción de términos semejantes**. Para reducir términos semejantes se suman sus coeficientes y se deja la misma parte literal. Por ejemplo, para reducir términos semejantes en la expresión $-3ab + 8ab$ se tiene que $-3 + 8 = 5$, con lo cual $-3ab + 8ab = 5ab$.

Cuando se suman o se restan dos o más polinomios, se inicia colocando los polinomios entre paréntesis uno seguido del otro escribiendo el signo $+$ o $-$ entre ellos, según corresponda. Luego, se suprimen paréntesis y se reducen términos semejantes.

Si la expresión tiene varios signos de agrupación se aconseja iniciar reduciendo las expresiones que están dentro de los que se encuentran más internos, esto facilita los cálculos. Luego, se suprimen los signos de agrupación que contienen las expresiones reducidas y se reducen términos semejantes.

EJEMPLOS

1. Restar $3x - 4y$ al binomio $-5x + 8y$.

Se realizan los siguientes pasos:

$(-5x + 8y) - (3x - 4y)$ Se escriben los polinomios entre paréntesis, separados por el signo $-$.

$= -5x + 8y - 3x + 4y$ Se suprimen signos de agrupación.

$= -5x - 3x + 8y + 4y$ Se agrupan términos semejantes.

$= -8x + 12y$ Se reducen términos semejantes.

Por tanto, la resta de $-5x + 8y$ con $3x - 4y$ es igual a $-8x + 12y$.

2. Hallar el área sombreada, si el área del rectángulo $ABCD$ es $15x^2 + 8$.

Primero, se tiene que para calcular el área sombreada, se le resta al área del rectángulo $ABCD$ la suma de las áreas del semicírculo y del triángulo.

Luego, se realizan los siguientes pasos.

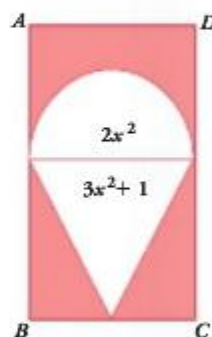
$(15x^2 + 8) - [(3x^2 + 1) + 2x^2]$ Se plantea la expresión algebraica.

$= 15x^2 + 8 - [3x^2 + 1 + 2x^2]$ Se suprimen los paréntesis.

$= 15x^2 + 8 - 3x^2 - 1 - 2x^2$ Se suprimen los corchetes.

$= 10x^2 + 7$ Se reducen términos semejantes.

Finalmente, se tiene que el área sombreada del rectángulo $ABCD$ está dada por la expresión $10x^2 + 7$.





Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** 34. Numera los pasos que se deben seguir para realizar la sustracción de dos o más binomios.

- ☐ Se agrupan términos semejantes.
☐ Se escriben los binomios separados por el signo menos.
☐ Se suprimen signos de agrupación.
☐ Se reducen términos semejantes.

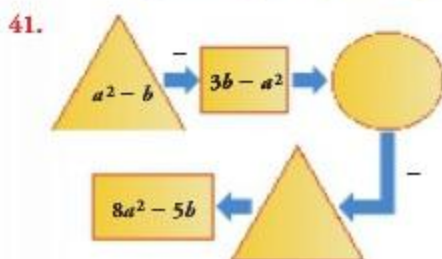
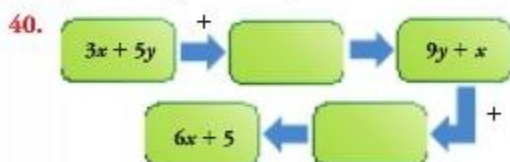
- E** 35. Completa la siguiente tabla (fila - columna).

-	$-3x^2 + y$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}y$	$-7y + 5x^2$
$-7x^2$			
$4x^2 + 3y$			
$-3x^2 + \frac{1}{2}y$			
$-7x^2 + \frac{5}{7}y$			
$\frac{8}{3}y + \frac{4}{5}x^2$			

- V** Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta con un ejemplo.

36. La suma de dos monomios puede ser un binomio.
 37. La diferencia entre dos binomios cuyos términos son semejantes es igual a cero.
 38. La suma de dos binomios siempre es un binomio.
 39. La diferencia entre un polinomio y su opuesto siempre es igual a 0.

- R** Completa los siguientes esquemas.



- E** Lee y resuelve.

42. La suma entre $5a^2b$ y $-8a^2b$.
 43. Restar $4x^3y^2z + 8x^3y^2z$ de $(5x^3y^2z + 2x^3y^2z)$.
 44. De $(12xyz + 3xyz)$ restar $8xyz$.
 45. A $-7a^2b + 6a^2$ restarle la suma $(9a^2b + 7a^2)$ y $(13a^2b - 4a^2)$.
 46. A la suma de $(5x + 4y)$ y $(8x + y)$ restar $\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}y$.

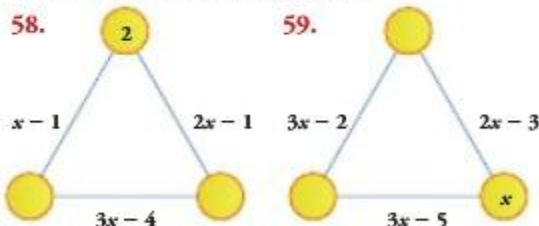
- P** Escribe una adición y una sustracción de dos binomios para cada uno de los siguientes resultados.

47. $5xy^2z$ 50. $-7bc + 8m$
 48. $-7abc$ 51. $10ab - 3c$
 49. $14m^3n^2$ 52. $6xy - 3x + 2$

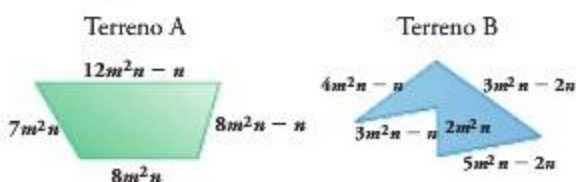
- R** Completa cada igualdad de manera que sea verdadera.

53. $(-4x + y) + \square = 3x + 3y$
 54. $(3a^2 + 5b^3) + \square = -2a^2 + 9b^3$
 55. $(mn^2 - 5p) - \square = 8p - 4mn^2$
 56. $\square + (5vw + 6v) = 3v - 7vw$
 57. $\square - \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + 3z\right) = -\frac{3}{2}x^2y^2 - 4z$

- R** Halla el polinomio de cada vértice si la suma de dos vértices está en la línea que los une.



- S** Las siguientes figuras representan dos terrenos con sus respectivas medidas.



60. Calcula la diferencia entre el perímetro del terreno A y el perímetro del terreno B.



2.2 Multiplicación



Actividad



Ampliación multimedia



Enlace web

En la multiplicación de polinomios se presentan los siguientes casos:

Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios, primero se multiplican los coeficientes y luego se multiplican las partes literales correspondientes a cada término aplicando las propiedades de la potenciación. Por ejemplo, para multiplicar $-3x^2y^3z^5$ por $5w^4y^6x^4$ se realizan los siguientes pasos:

Recuerda que...

Cuando se multiplican potencias de una misma base x se cumple que:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(-3x^2y^3z^5) \cdot (5w^4y^6x^4)$$

Se plantea la multiplicación.

$$= (-3 \cdot 5)(x^2 \cdot x^4)(y^3 \cdot y^6)z^5w^4$$

Se multiplican los coeficientes y las partes literales.

$$= -15x^6y^9z^5w^4$$

Se aplican propiedades de la potenciación.

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, aplicando la propiedad distributiva. Por ejemplo, para multiplicar $8x^2y^3z^5$ por $-2xy^3z^3 + 4w^2y^6x^3$, se realizan los siguientes pasos:

$$(8x^2y^3z^5) \cdot (-2xy^3z^3 + 4w^2y^6x^3)$$

Se plantea la multiplicación.

$$= -16x^3y^6z^8 + 32x^5y^9z^5w^2$$

Se aplica la propiedad distributiva.

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar un polinomio por un polinomio, se aplica la propiedad distributiva de tal forma que se multiplica cada término del primer polinomio, por cada uno de los términos del segundo polinomio. Luego se reducen términos semejantes. Por ejemplo, para multiplicar $2x^2y + 5xy^2$ por $4x - 7y$, se realizan los siguientes pasos:

$$(2x^2y + 5xy^2) \cdot (4x - 7y)$$

Se plantea la multiplicación.

$$= 8x^3y - 14x^2y^2 + 20x^2y^2 - 35xy^3$$

Se aplica propiedad distributiva.

$$= 8x^3y + 6x^2y^2 - 35xy^3$$

Se reducen términos semejantes.

EJEMPLO

El precio unitario de cierto tipo de chocolates está dado por la expresión $x^2 + x + 1$. Si en total se venden $x + 2$ unidades, ¿cuál es el ingreso total por la venta de esta cantidad de chocolates?

Primero, se tiene que el ingreso total por la venta, corresponde al producto de la cantidad de chocolates $x + 2$ por el precio unitario $x^2 + x + 1$.

Luego, se realizan los siguientes pasos.

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x + 2)$$

Se plantea la multiplicación.

$$= x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + x + 2$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$

Se reducen términos semejantes.

Finalmente, se tiene que el ingreso total por la venta de $x + 2$ chocolates es:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 2$$





Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Completa cada una de las siguientes proposiciones.

61. El producto de dos monomios es un _____.
62. Para multiplicar un monomio por un _____ se debe aplicar la propiedad distributiva.
63. Cuando se multiplican potencias de la misma base se escribe la misma base y se _____ los exponentes.

E 64. Completa la tabla.

$\times$	$2x^2y$	x^3y^2z	$-z^2y$	$\frac{1}{2}x^2y$
$-7xy$				
$4xy^2$				
$-8xy$				
$-\frac{1}{3}x^2y^3z$				

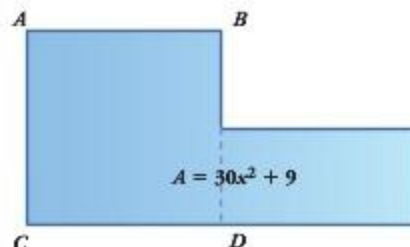
E Relaciona cada multiplicación con su respectivo producto.

65. $x(3x + y)$ a. $-2x^4y + 2xy^3$
66. $-2xy(x^3 - y^2)$ b. $2xy^3 - 2x^3y$
67. $-3x^3(x^2 + 2y^3)$ c. $3x^2 + xy$
68. $2xy(y^2 - x^2)$ d. $-3x^5 - 6x^3y^3$

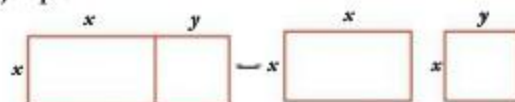
E Multiplica los siguientes binomios.

69. $(a + b)(a + b)$
70. $(6x - 8x^2)(6x + 2)$
71. $(3x + y)(4x + 2y)$
72. $(-7x^2 + 4x)(3x + x^2)$
73. $\left(\frac{7}{6}x^5 - 4\right)\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^6\right)$

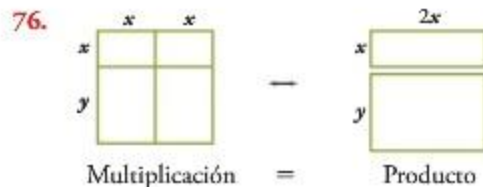
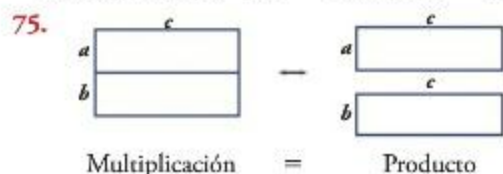
S 74. Escribe algunas posibles expresiones algebraicas que representen las medidas de los lados de la siguiente figura, de tal forma que su área sea la que se indica.



R Completa la multiplicación y el producto que representa cada figura teniendo en cuenta el siguiente ejemplo.



Multiplicación $x(x + y)$ Producto $x^2 + xy$

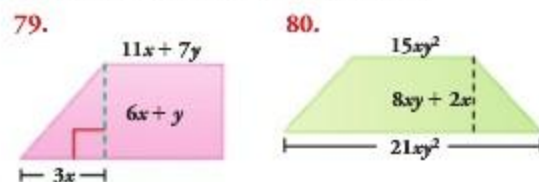


I Explica cuál es el error en cada multiplicación. Luego, corrígelo.

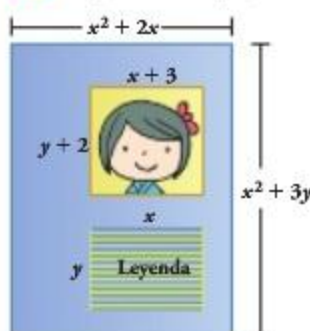
77. $(8x^5y^7 + 7x^3y^4) \cdot (3x^6) = 24x^{11}y^{13} + 21x^{18}y^{10}$

78. $\left(\frac{4}{5}x^2yz\right) \cdot (x^3y - 3x^5y^2z) = \frac{4}{5}x^5y^2 - \frac{12}{5}x^7y^3z^2$

R Calcula el área de las siguientes figuras.



S El siguiente bosquejo muestra el diseño de un afiche.



81. ¿Cuál es el área del afiche?
82. ¿Cuál es el área de la fotografía y la leyenda?
83. ¿Cuál es el área de la parte azul?



2.3 División



Recurso
imprimible

Para que el **cociente entre dos monomios** sea un monomio se debe cumplir que las variables del divisor se encuentren en el dividendo, y que además, sus exponentes en el divisor sean menores o iguales que sus exponentes en el dividendo.

El **cociente entre dos monomios** es otro monomio, tal que su coeficiente es el cociente entre los coeficientes, y su parte literal es el cociente entre las partes literales, el cual se obtiene aplicando la división de potencias de igual base.

Por ejemplo, para dividir $-18x^7y^5$ entre $6x^4y^2$, se realizan los siguientes pasos.

$$\frac{-18x^7y^5}{6x^4y^2}$$

Se plantea la división.

$$= (-3) \left(\frac{x^7y^5}{x^4y^2} \right)$$

Se dividen los coeficientes.

$$= (-3)(x^{7-4})(y^{5-2})$$

Se aplica la división de potencias de igual base.

$$= -3x^3y^3$$

Se restan los exponentes.

Por tanto, al dividir $-18x^7y^5$ entre $6x^4y^2$, se obtiene como cociente $-3x^3y^3$.

Cuando se divide un polinomio entre un monomio, se divide cada término del dividendo entre el monomio del divisor. En este caso, para que el cociente sea un polinomio, los exponentes de las respectivas variables del monomio divisor deben ser menores o iguales que los de cada uno de los términos del dividendo.

Por ejemplo, para dividir $24x^4y^5z^2 + 12x^6y^4$ entre $6x^2y^4$ se realizan los siguientes pasos.

$$\frac{24x^4y^5z^2 + 12x^6y^4}{6x^2y^4}$$

Se plantea la división.

$$+ \frac{24x^4y^5z^2}{6x^2y^4} + \frac{12x^6y^4}{6x^2y^4}$$

Se divide cada término entre el monomio del divisor.

$$= 4x^2yz^2 + 2x^4$$

Se efectúa la división entre monomios.

Por tanto, el cociente de $24x^4y^5z^2 + 12x^6y^4$ entre $6x^2y^4$ es $4x^2yz^2 + 2x^4$.

Recuerda que...

Algunas propiedades de la potenciación son:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, n \geq m$$

$$a^0 = 1, \text{ si } a \neq 0$$

EJEMPLO

Calcular la velocidad constante de un móvil suponiendo que la distancia que recorre está dada por la expresión $3xt^2 + 12t$ y el tiempo es $6t$.

Primero, se tiene que la velocidad es la razón entre la distancia y el tiempo.

Luego, se realiza la división de $3xt^2 + 12t$ entre $6t$ así:

$$\begin{aligned} & \frac{3xt^2 + 12t}{6t} \\ & + \frac{3xt^2}{6t} + \frac{12t}{6t} \\ & + \frac{1}{2}xt + 2 \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene la velocidad del móvil está dada por la expresión $\frac{1}{2}xt + 2$.


Afianzo COMPETENCIAS

Interpretar • Argumentar • Proponer • Ejercitar • Razonar

I Responde las siguientes preguntas.

84. ¿Qué condición se debe cumplir para que la división entre dos monomios sea otro monomio?

85. ¿Cómo se divide un binomio entre un monomio?

E Determina si cada proposición es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

 86. Si en una división el dividendo es $15m^5$ y el divisor es $-3m^5$, entonces el cociente es 5.

87. En una división el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo.

 88. Si en una división $2b - a$ es el cociente y $5ab$ es el divisor, entonces el dividendo es $10ab^2 - 5a^2b$.

89. En la división de dos monomios semejantes cuyos coeficientes son enteros, el cociente siempre es un número entero.

E 90. Completa la siguiente tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente
$6a^8b^8$	$3a^5b^2$	
$-4x^6y^4z^2$	xy^2z	
$-3m^5n^3o^2$	$-3m^3n^3o$	
$45x^8y^7z^3$	$-5x^3y^2z$	
$-\frac{1}{4}m^6n^8$	$-2m^3n$	
$\frac{1}{3}x^5y^7z$	$-3x^5y^5z$	
$-\frac{4}{5}p^8q^7r^2$	$-\frac{10}{8}p^6q^3r^2$	

E Completa los espacios con algunos posibles números que hagan verdadera cada igualdad.

91. $\frac{36m^{\square}n^{\square}}{2m^2n^6} = \square m^6n$

93. $\frac{42a^{\square}b^{\square}c^{\square}}{7a^{\square}b^{\square}c^{\square}} = 6$

92. $\frac{7x^6y^3z}{5x^{\square}y^{\square}} = \square x^2y^{\square}z$

94. $\frac{x^{\square}y^{\square}z^{\square}}{x^{\square}y^{\square}z^{\square}} = xy$

R Resuelve.

95. Los coeficientes de tres monomios semejantes, son tres números naturales consecutivos. Si se suman el de menor y el de mayor coeficiente, y la suma se divide entre el otro monomio, ¿cuál es el cociente?

E Resuelve cada división y al lado de cada operación, escribe la letra que corresponde al resultado. Descubrirás el nombre de un importante matemático de la India.

96. $x^5y^6 \div x^3y^2$

97. $4x^3y^2 \div 2xy$

98. $3x^2y^5z^6 \div 3x^2y^3z^4$

99. $(x^5 + x^4) \div (-x^3)$

100. $(8y^3 - 12y^2) \div (-4y)$

101. $(-x^3y^2z - xyz) \div (-xyz)$

102. $(-5x^6y^5z^4 - 10x^3y^4z^2) \div (5xyz)$

103. $(-\frac{2}{7}x^3y^2 + \frac{3}{4}x^4y) \div (-28xy)$

104. $(-\frac{1}{3}x^7y^3 - \frac{3}{4}x^7y) \div (-12x^5y)$

$2x^2y$	$-2y^2 + 3y$	$-x^5y^4z^3 - 2x^2y^3z$
A	N	J
$\frac{1}{36}x^2y^2 + \frac{1}{16}x^2$	y^2z^2	$\frac{1}{98}x^2y - \frac{3}{112}x^3$
N	M	A
x^2y^4	$x^2y + 1$	$-x^2 - x$
R	U	A

E Halla el término que hace falta en cada expresión.

105. $\square \cdot 3x = x^2 + 3x$

106. $\square \cdot 4m^3n^2 = 2m^8n^4 + m^3n^3$

107. $\square \cdot -5x^3y^2z = -10x^5y^6z - 3x^4y^3z$

108. $(\frac{2}{5}x^3y^2z) \cdot \square = \frac{1}{2}x^6y^6z^6 - \frac{5}{4}x^4y^3z$

R Encuentra la expresión algebraica que hace falta en cada una de las siguientes figuras.

109.

111.

110.

112.



Expresiones algebraicas

Completa cada enunciado.

113. En el monomio $3x^5y^4z^3$, se tiene que 3 es el _____.
114. Los monomios $-4a^3b^2$, $5a^3b^2$ y $-3b^2a^3$ son _____.
115. La expresión $7y^2z^5 - x^4y^3z^2$ es un _____.
116. Dos o más monomios son semejantes cuando tienen la misma _____.

Escribe al frente de cada expresión algebraica un monomio semejante.

117. $5x^3y^5z$ _____ 120. $-7a^2bc$ _____
118. $-3a^2b^3c^4$ _____ 121. $\frac{3}{5}r^4s^2t$ _____
119. $-\frac{4}{3}m^8n^6$ _____ 122. $-\frac{7}{8}u^4v^3w^2$ _____

Clasifica las siguientes expresiones algebraicas en monomio, binomio, trinomio o polinomio.

123. $-2a^2b - 3ab^6 + 4a^3b^8$ _____
124. $-5x^5y^9 + 7x^6y^8 - 2$ _____
125. $8xyz$ _____
126. $3x^2y + x - y + 1$ _____
127. $-\frac{1}{3}x^3y^4$ _____
128. $-z^3 + z^2$ _____
129. $\frac{1}{5}m^5 + m^4 - n^3 + n^2$ _____

Escribe la expresión algebraica que representa cada enunciado.

130. El doble de un número: _____
131. Un número disminuido en 8: _____
132. La quinta parte de un número: _____
133. El triple de un número excedido en 7: _____
134. La mitad de la suma de dos números: _____
135. Un número más su consecutivo: _____
136. El cuadrado de un número, menos su mitad _____
137. El triple de un número aumentado en la tercera parte del número: _____

Escribe en lenguaje común las siguientes expresiones algebraicas.

138. $4x$: _____
139. $\frac{x}{3} - x$: _____
140. $3(x-1)$: _____
141. $\frac{1}{4}x + 2x$: _____

Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas teniendo en cuenta que $a = -1$, $b = 2$ y $c = -2$.

142. $a^2 - 3b + 4$ Valor: _____
143. $4b^2 - 3c - 2$ Valor: _____
144. $c^3 - 3b^2 - 5$ Valor: _____
145. $-3a^3 + 4b^2 - 6$ Valor: _____

Operaciones entre expresiones algebraicas

Resuelve las siguientes adiciones y sustracciones.

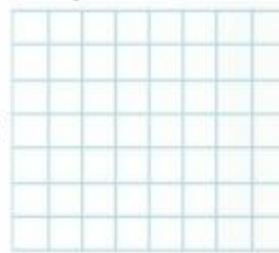
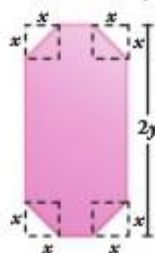
146. $(-3a^3 + 4b^2 - 6) + (a^3 - 5b^2 + 10)$



147. $(\frac{1}{5}x^3 - 8y^2 - 6) - (y^2 - 5x^3 + 10)$

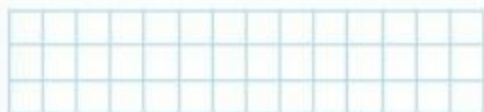


Halla una expresión algebraica que represente el área de la siguiente figura.



Efectúa las operaciones.

149. $(12a^3b^2) \cdot (2a^3b - 4ab^2 + 5)$



150. $(4x - 3) \cdot (6x + 1)$

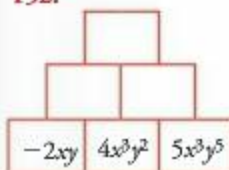


151. $\left(-\frac{3}{2}a^6b^5 - \frac{4}{3}a^8b^3\right) \div \left(-\frac{1}{3}a^6b^2\right)$

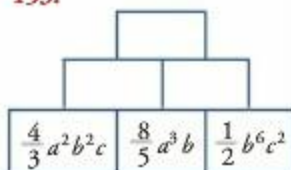


Completa cada pirámide teniendo en cuenta que el número de arriba es el resultado de la multiplicación de los números que están abajo.

152.

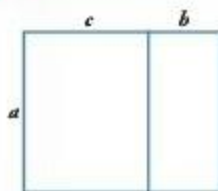


153.

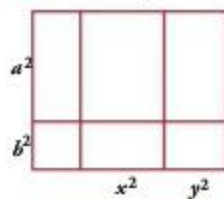


Colorea la región de cada figura que corresponde al área que representa la expresión indicada.

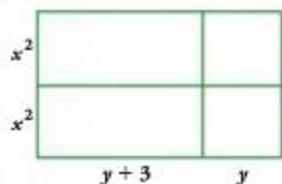
154. $a \cdot b$



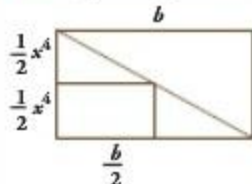
156. $a^2(x^2 + y^2)$



155. $x^2(y + 3) + x^2y$



157. $\frac{bx^4}{4} + \frac{bx^4}{2}$



Marca con un $\checkmark$ el término que hace falta en cada expresión.

158. $(3xy) \cdot \underline{\hspace{2cm}} = -12x^2y^7$

☐ $-4xy^6$

☐ $3xy^6$

159. $-\frac{1}{5}a^7b^5c^3 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 6a^8b^6c^4$

☐ $30abc$

☐ $-30abc$

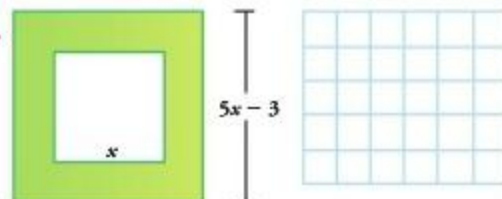
160. $\underline{\hspace{2cm}} \cdot (-3a^2b) = -6a^3b^3 + 12a^6b^3$

☐ $-2ab^2 - 4a^4b^2$

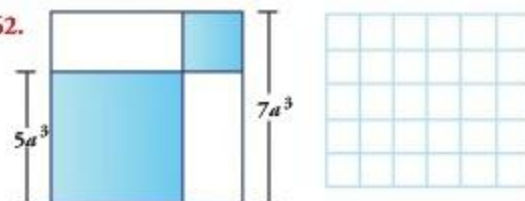
☐ $2ab^2 - 4a^4b^2$

Calcula la expresión que representa el área sombreada de las siguientes figuras, teniendo en cuenta que los polígonos que determinan las regiones sombreadas son cuadrados.

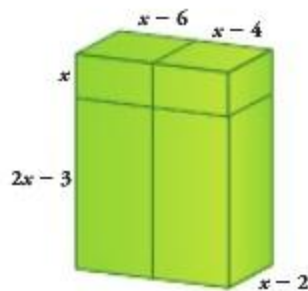
161.



162.



163. Aplica la multiplicación de expresiones algebraicas para calcular el volumen del siguiente cuerpo.

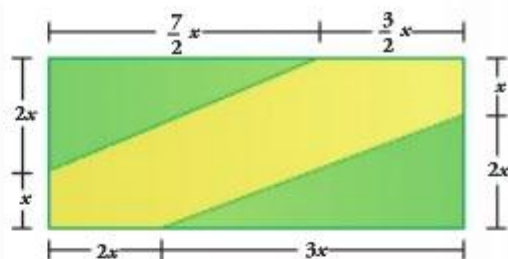




PROBLEMAS PARA REPASAR

El dueño de un centro comercial desea que la fachada, que es de forma rectangular, tenga una franja amarilla y que lo demás sea verde, como se muestra en la figura. Las dimensiones están dadas en metros y el costo de pintar un metro cuadrado de amarillo es de \$8.000 y el de pintar un metro cuadrado de verde es de \$5.000.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el costo total de pintar la fachada?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuál es la pregunta del problema?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el costo total de pintar la fachada?

¿Cuáles son los datos del problema?

Las dimensiones de la fachada son monomios que representan medidas en metros. Además, los costos de pintar un metro cuadrado son: \$8.000 de amarillo y \$5.000 de verde.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se calcula el área de las regiones que están de color verde. Como ambas regiones son triángulos rectángulos, para calcular el área de cada región se divide entre dos el producto de su base por su altura, así:

$$A_1 = \frac{(2x) \cdot \left(\frac{7}{2}x\right)}{2} = \frac{7}{2}x^2 \text{ y}$$

$$A_2 = \frac{(2x) \cdot (3x)}{2} = 3x^2$$

De donde el área de la superficie de color verde es $A_v = \frac{7}{2}x^2 + 3x^2 = \frac{13}{2}x^2$ y el costo de pintarla es $C_v = 5.000\left(\frac{13}{2}x^2\right) = 32.500x^2$.

Luego, se calcula el área de la franja amarilla A_a que es igual a la diferencia entre el área de la fachada y el área de la superficie de color verde. Por tanto, se tiene que

$$A_a = 15x^2 - \frac{13}{2}x^2 = \frac{17}{2}x^2$$

Así, el costo de pintar la región amarilla es $C_a = 8.000\left(\frac{17}{2}x^2\right) = 68.000x^2$.

Finalmente, se suma el costo de pintar la superficie verde y el costo de pintar la superficie amarilla, para hallar el costo total C_T .

$$\begin{aligned} C_T &= C_v + C_a \\ &= 32.500x^2 + 68.000x^2 \\ &= 100.500x^2 \end{aligned}$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que se hayan calculado correctamente las áreas de las regiones verde y amarilla. Luego, se tiene que la expresión que representa el costo total de pintar la fachada es $100.500x^2$.

Responde las preguntas 164 a 167 con una expresión algebraica.

Simón tiene m años, su padre tenía 30 años cuando él nació y su madre tenía 26 años.

164. ¿Cuántos años tendrá Simón en 8 años?

165. ¿Cuántos años tiene el padre de Simón?

166. ¿Cuántos años tiene la madre de Simón?

167. Si María tiene 5 años más que el doble de la edad de Simón, ¿cuántos años tiene María?

Resuelve las actividades 168 a 170 de acuerdo con la siguiente información.

En una empresa se elaboran diseños adhesivos con forma circular. Para esto, se utilizan pliegos rectangulares de papel adhesivo, de modo que con cada pliego se pueden formar dos diseños, como se muestra en la siguiente figura.



168. Escribe la expresión que permite calcular el área de cada diseño circular.

169. Determina el área de cada papel adhesivo.

170. Si la región sombreada en la figura corresponde a la cantidad de papel adhesivo que se desaprovecha, halla una expresión para calcular la cantidad de papel que se desperdicia cuando se realizan n diseños circulares.

171. La ganancia G en economía se define como la diferencia entre los ingresos totales I y los costos totales C de producción y distribución de una cantidad x de productos.



Supón que en una empresa se tiene que

$$I(x) = 12x^3 + 16x^2 + 12x + 8 \text{ y } C(x) = 5x^3 + 8x^2,$$

¿cuál es la expresión que representa la ganancia en este caso?

Responde las preguntas 172 y 173 de acuerdo con la siguiente información.

Una familia renta un carro, por lo cual debe pagar \$80.000 de cargo fijo más \$300 por cada kilómetro recorrido, cuando recorre menos de 100 km.



172. Si la familia recorre x kilómetros donde $x < 100$, ¿cuál es la expresión que representa el costo del alquiler?

173. Si recorre más de 100 kilómetros, el km adicional cuesta \$200. ¿Cuál es el costo del alquiler del carro si la familia recorre una distancia x superior a 100 kilómetros?

174. La siguiente factura muestra la cuenta que tuvo que pagar un cliente de un frigorífico por distintos cortes de carne de res.

Corte	Valor de una libra	Cantidad de libras
Punta de anca	$3x^2y$	$x + 2y$
Morrillo	x^2y	$x + y$
Lomo	xy	xy

¿Cuánto tuvo que pagar en total el cliente?

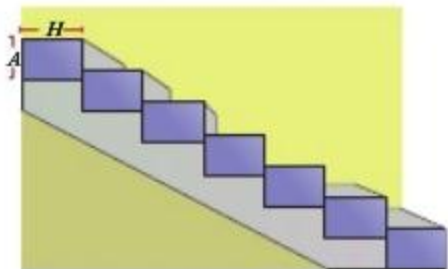


...Para encontrar las medidas básicas de una escalera.

Las dimensiones de una escalera deben cumplir con unos requisitos mínimos de seguridad, ya que de otro modo puede ser riesgoso caminar sobre ella. Las escaleras son lugares transitados por niños, ancianos, adultos y jóvenes, por igual, y por ello es importante que cada escalón tenga medidas que ofrezcan fácil acceso y comodidad a cualquier persona.

Con el fin de cumplir con las normas de seguridad para evacuaciones de edificios se han planteado algunas expresiones algebraicas que permiten obtener las medidas proporcionales para cada uno de los escalones de una escalera.

Para determinar las medidas de los escalones, es necesario expresar la distancia horizontal, con la variable H , y la altura de cada escalón con A , como se indica en la



Se establece que la razón entre la altura y la distancia horizontal siempre debe ser constante para todos los peldaños de la escalera. Es decir, que siempre debe tener un mismo valor.

$$\frac{A}{H} = \text{Valor constante}$$

1. ¿Por qué crees importante obtener relaciones para hallar las medidas de un escalón de una escalera?
2. Encierra las expresiones algebraicas que se mencionan en la lectura. Luego, clasifica cada una de las expresiones según su número de términos.
3. Se desea hacer una escalera de diferentes niveles para un parque con escalones de distinto tamaño en cada uno de los niveles. En la siguiente tabla se presentan algunas de las medidas para los tres niveles.

Altura	Distancia horizontal
14	28
16	29
16,5	34

4. Comprueba si las medidas de la tabla anterior están entre 60 y 65 centímetros de acuerdo con la expresión planteada en la lectura.



Además, la expresión algebraica $2 \cdot A + H$ no debe ser menor a 60 centímetros ni mayor a 65 centímetros.

Así, si un escalón tiene 15 cm de altura y 30 cm de distancia horizontal, se puede remplazar en la expresión anterior y así se sabe si está entre los 60 y 65 centímetros reglamentarios.

$$2 \cdot 15 + 30 = 60 \text{ cm}$$

Como se puede observar, la escalera con esas dimensiones cumple con los parámetros de seguridad de la construcción de escaleras.

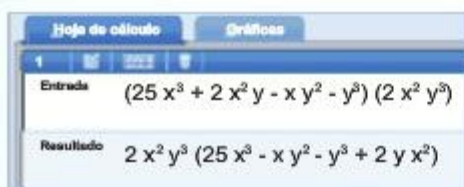
Trabaja con Microsoft Mathematics

Objetivo: resolver operaciones entre expresiones algebraicas y calcular su valor numérico.

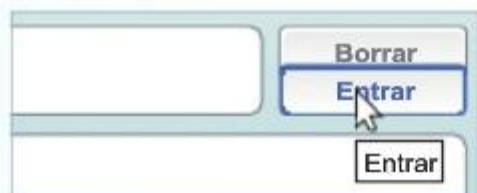
Descripción: realizar la multiplicación entre un polinomio y un monomio en Microsoft Mathematics. Luego, asignar valores a las variables del producto para calcular su valor numérico.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/download/en/details.aspx?id=15702

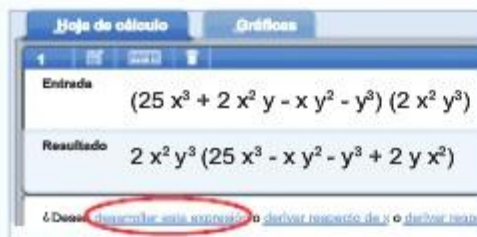
- 1 Haz clic en inicio de programas y luego clic en Microsoft Mathematics.
- 2 Digita $(25x^3 + 2x^2y - xy^2 - y^3) \cdot (2x^2y^3)$ en el cuadro de diálogo ubicado en la parte inferior. Utiliza el botón $\wedge$ para indicar los exponentes.



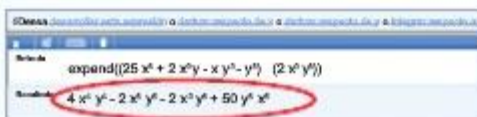
- 3 Haz clic en el botón **Entrar** en la parte derecha de la ventana.



- 4 Aparecerá la multiplicación en la parte superior de la ventana para ser resuelta. Luego, haz clic en la opción **desarrollar esta expresión**.



- 5 El polinomio que indica el producto aparecerá en la parte inferior, como se muestra en la siguiente imagen.



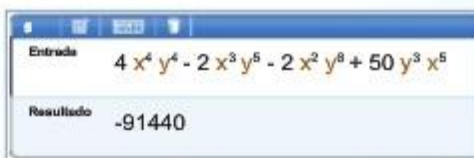
- 6 Para calcular el valor numérico de este polinomio cuando $x = -3$ y $y = 2$, digita -3 . Luego, haz clic en **almacén** y digita la variable x .



- 7 Presiona **Enter** y aparecerá el valor de x como se muestra a continuación.



- 8 Realiza nuevamente los pasos 6 y 7 para asignar el valor $y = 2$. Luego, haz doble clic en el polinomio y presiona **Enter** para que aparezca su valor numérico.



- 9 Digita **ClearAll()** y presiona Enter para borrar los valores de las variables y poder asignar otros valores.

- 10 Efectúa las siguientes operaciones en Microsoft Mathematics. Luego, calcula el valor numérico del resultado teniendo en cuenta que $a = 4$ y $b = -2$.

- a. $(a^2b - ab^2 + 3)(a^2b)$
- b. $(\frac{8}{5}a^2b - 2ab^2 + \frac{3}{7}ab)(a^2 - b^2)$
- c. $(25a^4b^6 - 10a^8b^6 + 5a^4b^5) \div (5a^2b^3)$

5

Figuras planas

Estándares: pensamientos espacial y métrico

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer las **características generales** de los polígonos.
- Determinar la **clasificación** de un polígono a partir de sus elementos y sus propiedades.
- Reconocer el **perímetro** como un atributo medible en los polígonos.
- Determinar el **área** de una figura.

Encuentra en tu Libromedia

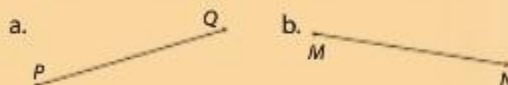
✓ Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba PISA

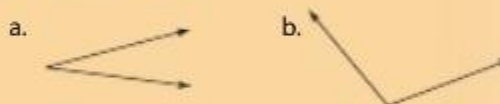
- | | |
|---------------|---------------|
| 5 Multimedia | 1 Audio |
| 1 Galería | 4 Imprimibles |
| 8 Actividades | 3 Enlaces web |

Lo que sabes...

1. Usa el compás para trazar segmentos que tengan la misma medida de cada segmento dado.



2. Traza ángulos que tengan la misma medida de los siguientes ángulos.



3. Clasifica los siguientes polígonos según el número de lados, medida de lados y ángulos, y su convexidad.





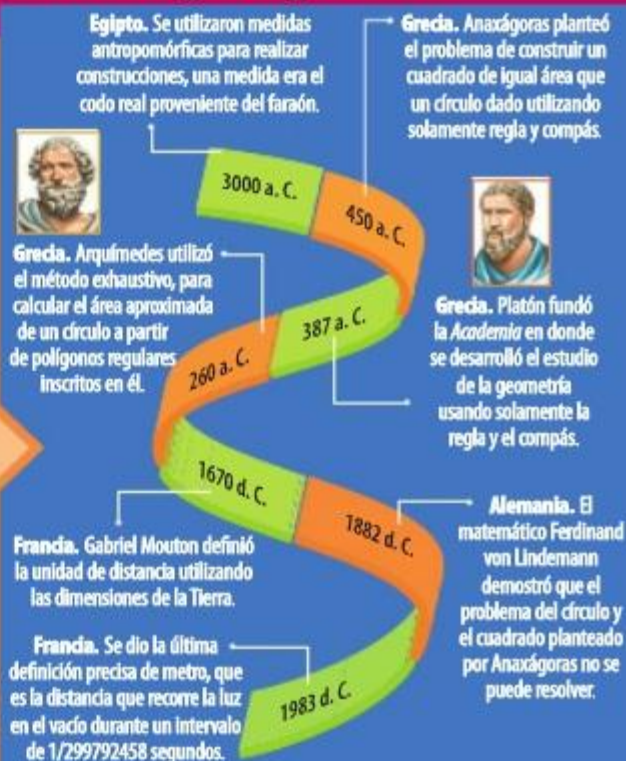
Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer las medidas del rin de una rueda de automóvil.

La rueda es un disco circular que se creó para girar en torno a su punto central. El invento de la rueda trajo gran evolución y desarrollo para el hombre en las áreas de ingeniería, agricultura y transporte en general. Las primeras ruedas se construyeron en Mesopotamia alrededor del año 3500 a. C.

■ Lee más acerca de este tema en la página 212.

Cronología de geometría





1. Polígonos



Recurso
imprimible

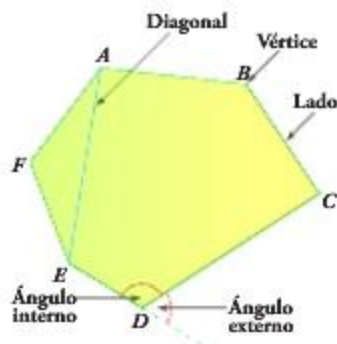
Historia de las matemáticas

Galileo

Uno de los objetivos principales de las matemáticas ha sido la interpretación del mundo que nos rodea. Decía Galileo Galilei, refiriéndose a la interpretación del universo: "El universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto".

Un **polígono** es una figura plana limitada por segmentos, tales que cada segmento se interseca con otro solo en sus puntos extremos, y ningún par de segmentos consecutivos son colineales.

Observa en la figura el polígono $ABCDEF$ y sus elementos:



EJEMPLOS

1. Calcular la suma de los ángulos exteriores representados en el polígono $GHIJK$.

Primero, se prolongan los lados del polígono para determinar sus ángulos exteriores.

Como la suma de cada ángulo interior del polígono y su correspondiente ángulo exterior es 180° , ya que son ángulos adyacentes, se tiene que:

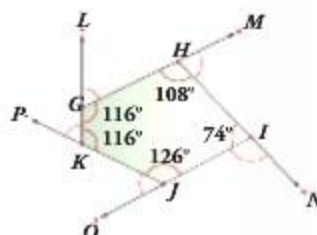
$$m\angle MGL = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$

$$m\angle NHM = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$m\angle OIN = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

$$m\angle PJO = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$$

$$m\angle LKP = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$$



Luego, se suma:

$$m\angle MGL + m\angle NHM + m\angle OIN + m\angle PJO + m\angle LKP \\ = 64^\circ + 72^\circ + 106^\circ + 54^\circ + 64^\circ = 360^\circ.$$

Por tanto, la suma de los ángulos exteriores del polígono $GHIJK$ es 360° . En general, la suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360° .

2. Observar la figura. Luego, calcular el valor de x .

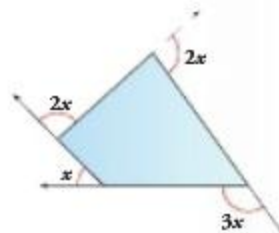
Como la suma de los ángulos exteriores de un polígono es 360° , se plantea la ecuación:

$$x + 2x + 2x + 3x = 360^\circ$$

$$8x = 360^\circ$$

$$x = 360^\circ \div 8 = 45^\circ$$

Por tanto, el valor de x es 45° .



Recuerda que...

El número de diagonales y la suma de sus ángulos interiores se determinan mediante las siguientes expresiones donde n es el número de lados.

Número de diagonales

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Suma de los ángulos interiores

$$S = (n - 2) \times 180^\circ$$



1.1 Clasificación de polígonos

Los polígonos se clasifican según la **forma**, el **número de lados** y la **medida de sus lados** y **ángulos interiores**.

Según la forma	Según el número de lados	Según la medida de sus lados y de sus ángulos interiores
Se clasifican en convexos y cóncavos. Un polígono es convexo cuando ninguno de sus ángulos interiores mide más de 180°. Un polígono es cóncavo cuando alguno de sus ángulos interiores mide más de 180°.	Se clasifican como triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono y así sucesivamente. Por ejemplo, el pentágono tiene cinco lados y el hexágono, seis.	Se clasifican en regulares e irregulares. Un polígono es regular cuando todos sus lados y sus ángulos tienen la misma medida. En cambio, es irregular cuando sus lados y sus ángulos tienen diferente medida.
 Convexo Cóncavo	 Pentágono Hexágono	 Polígono regular Polígono irregular

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Clasifica cada polígono según la forma, según el número de lados y según las medidas de los lados.



A Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

5. Todos los triángulos son polígonos convexos. ()
6. Un polígono es cóncavo si tiene más de un ángulo mayor que 180° . ()
7. Todo hexágono es convexo. ()
8. En un polígono cualquier par de lados no consecutivos, tienen un punto en común. ()

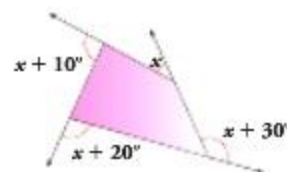
M Dibuja un polígono que cumpla las condiciones dadas.

9. Un cuadrilátero cóncavo.
10. Un pentágono convexo e irregular.

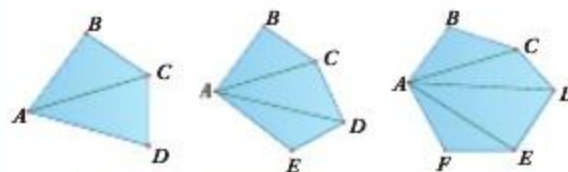
11. Un hexágono convexo que sea regular.

12. Un eneágono cóncavo.

R 13. Calcula el valor de x en la figura.



S 14. Observa cada figura y completa la tabla.



Polígono	Lados	Diagonales desde A
Cuadrilátero	4	$4 - 3 = 1$
Pentágono	5	$5 - 3 = 2$
Hexágono		
De n lados	n	



Triángulos

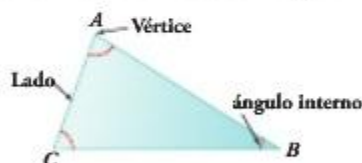


Recurso imprimible

Un triángulo es una región del plano limitada por tres rectas que se intersecan dos a dos.

El triángulo es el polígono básico porque cualquier otro polígono puede ser formado como una composición de triángulos dispuestos lado a lado. Por ejemplo, el pentágono $ABCDE$, que se muestra en la figura 1, está compuesto por los $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ y el $\triangle CDE$.

A continuación, se representan los elementos del triángulo ABC .



Para nombrar un triángulo se escribe el símbolo $\triangle$ seguido de las tres letras que indican sus vértices. Así, el triángulo mostrado se nombra $\triangle ABC$, donde A , B y C son los vértices, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los lados, y $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$ son los ángulos interiores.

Para nombrar los lados de un triángulo, también se puede escribir la letra que indica el vértice del lado opuesto, en minúscula. Por ejemplo, los lados del $\triangle ABC$ se pueden expresar como: a , b y c .

Para indicar la congruencia entre dos lados o dos ángulos de un triángulo, se utilizan marcas sobre cada uno de ellos. Así, en $\triangle MLA$ se tienen que $\overline{ML} \cong \overline{AL}$ y $\angle A \cong \angle M$, como se muestra en la figura 2.

Clasificación de triángulos



Actividad



Ampliación multimedia

Los triángulos se clasifican según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.

■ Según la medida de sus lados los triángulos se clasifican en:

Triángulo equilátero



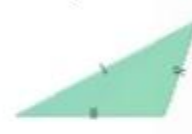
Tiene los tres lados congruentes entre sí.

Triángulo isósceles



Tiene dos lados congruentes.

Triángulo escaleno



Ningún par de lados son congruentes.

■ Según la medida de sus ángulos los triángulos se clasifican en:

Triángulo rectángulo



Tiene un ángulo recto.

Triángulo acutángulo



Sus tres ángulos son agudos.

Triángulo obtusángulo



Tiene un ángulo obtuso.

Matemáticamente

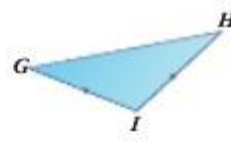
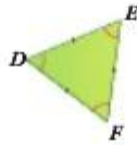
Los triángulos tienen una rigidez que otros polígonos no la tienen. Esta característica es responsable para el uso de triángulos en grandes estructuras como torres.



Investiga otras estructuras, donde se usen triángulos.



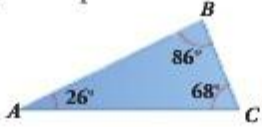
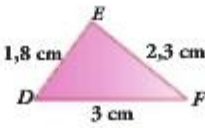
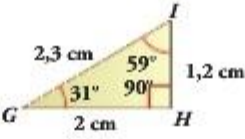
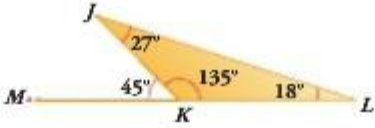
Por ejemplo, al clasificar los siguientes triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos, se tiene:



- El $\triangle ABC$ es escaleno y rectángulo, ya que sus tres lados tienen medidas distintas y el $\angle C$ mide 90° .
- El $\triangle DEF$ es equilátero y acutángulo, pues sus tres lados tienen la misma medida y los $\angle D$, $\angle F$ y $\angle E$ son agudos.
- El $\triangle GHI$ es isósceles y obtusángulo, pues solo dos de sus lados son iguales y el $\angle I$ es obtuso.

Propiedades de los triángulos

En todo triángulo se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Ejemplo
1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° .	En $\triangle ABC$, se cumple:  $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 26^\circ + 86^\circ + 68^\circ = 180^\circ$
2. La medida de uno de los lados de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados.	En $\triangle DEF$, se tiene:  $DF < DE + EF \text{ porque } 3 < 1,8 + 2,3$
3. En todo triángulo, a mayor lado se opone un mayor ángulo. De la misma manera, a menor lado se opone un menor ángulo.	En $\triangle GHI$, se tiene:  El lado de 2,3 cm que es el de mayor longitud, le corresponde el ángulo mayor. Mientras el lado de 1,2 cm que es el de menor longitud, le corresponde el ángulo menor.
4. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.	En $\triangle JKL$ se cumple:  $m\angle MKJ = m\angle J + m\angle L \text{ porque } 45^\circ = 27^\circ + 18^\circ$

Recuerda que...

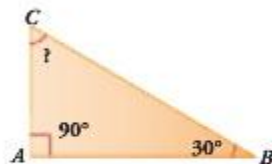
Para comparar la longitud entre dos segmentos, no se requiere medirlos. Se puede usar la abertura del compás. Entre mayor sea la abertura del compás, será mayor la longitud del segmento.





EJEMPLOS

1. Calcular la medida del ángulo que falta en el siguiente triángulo.



Por la propiedad 1 se tiene que:

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ.$$

Luego, se realiza el siguiente procedimiento.

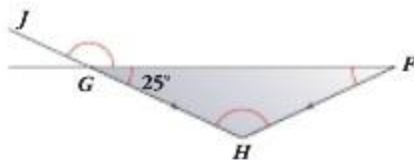
$$90^\circ + 30^\circ + m\angle C = 180^\circ \quad \text{Se reemplazan las medidas del } \angle A \text{ y del } \angle B.$$

$$120^\circ + m\angle C = 180^\circ \quad \text{Se suma.}$$

$$m\angle C = 60^\circ \quad \text{Se resta } 120^\circ \text{ en ambos miembros de la igualdad.}$$

Por tanto, la medida del $\angle C$ es 60° .

2. Observar la figura. Luego, hallar la medida de los ángulos: F , H y FGJ .



Como el $\triangle FGH$ es isósceles, entonces, los ángulos G y F tienen igual medida, porque los lados $\overline{GH}$ y $\overline{FH}$ tienen igual medida aplicando la propiedad 3.

$$\text{Luego, } m\angle F = 25^\circ.$$

Ahora, por la propiedad 1 se tiene:

$$m\angle F + m\angle G + m\angle H = 180^\circ.$$

$$25^\circ + 25^\circ + m\angle H = 180^\circ \quad \text{Se reemplazan las medidas de } \angle F \text{ y del } \angle G.$$

$$m\angle H = 130^\circ \quad \text{Se suma y se despeja } m\angle H.$$

$$\text{Luego, } m\angle H = 130^\circ.$$

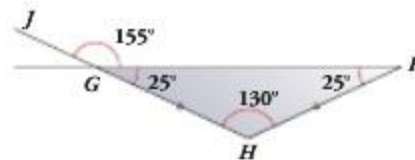
Después, se halla la medida del $\angle FGJ$ aplicando la propiedad 4.

$$m\angle FGJ = m\angle H + m\angle F$$

$$m\angle FGJ = 130^\circ + 25^\circ \quad \text{Se reemplazan las medidas del } \angle F \text{ y del } \angle G.$$

$$m\angle FGJ = 155^\circ$$

$$\text{Luego, } m\angle FGJ = 155^\circ.$$



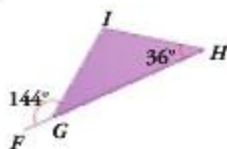
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

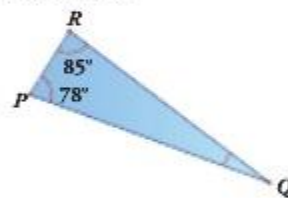
15. Nombra cada uno de los siguientes triángulos. Luego, mide los lados y los ángulos de cada triángulo y verifica en cada uno las cuatro propiedades de los triángulos.



16. De acuerdo con la información dada en la figura, demuestra que el $\triangle GHI$ es isósceles. Explica tu razonamiento.



17. Completa cada enunciado con los signos $<$, $>$ o $=$, para que sea verdadero.



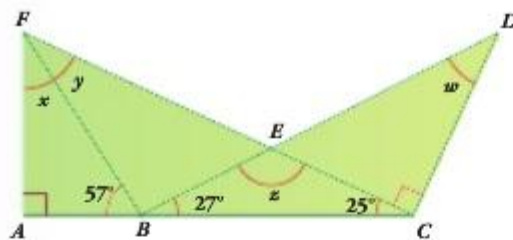
17. $m\angle Q$ _____ $m\angle R$
 18. $m\angle P + m\angle Q + m\angle R$ _____ 180°
 19. PQ _____ PR
 20. PQ _____ $PR + RQ$
 21. PR _____ RQ _____ PQ



1 Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta. En caso de ser falso, muestra un contraejemplo.

22. En todo triángulo, la medida de uno de sus lados es menor o igual que la suma de los otros dos lados. ()
23. En todo triángulo, a mayor lado se opone un ángulo menor y a menor lado se opone un ángulo mayor. ()
24. En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos ángulos interiores no contiguos. ()
25. Todo triángulo isósceles tiene dos ángulos interiores congruentes. ()
26. Si un triángulo tiene un ángulo recto o un ángulo obtuso, entonces la medida de este ángulo es mayor que la medida de cualquiera de los otros dos ángulos. ()

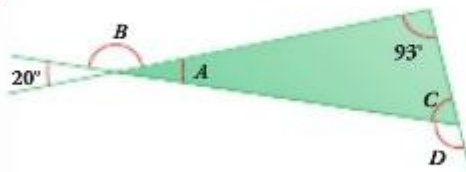
R De acuerdo con la figura, realiza las actividades que se indican.



27. Nombra todos los triángulos de la figura.
28. Clasifica cada triángulo según la medida de sus ángulos y de sus lados. Usa un compás para comparar la medida de los lados.
29. Encuentra el valor de w , x , y , z .

E Observa cada figura. Luego, escribe la medida de los elementos pedidos.

30.

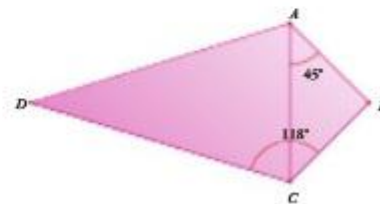


$$\begin{aligned} m\angle A &= ______ & m\angle C &= ______ \\ m\angle B &= ______ & m\angle D &= ______ \end{aligned}$$

S Lee y resuelve.

En el documento de compraventa de un terreno aparecen las siguientes especificaciones: Los lados del terreno miden 60 m, 70 m y 90 m y dos de sus ángulos miden 42° y 87° .

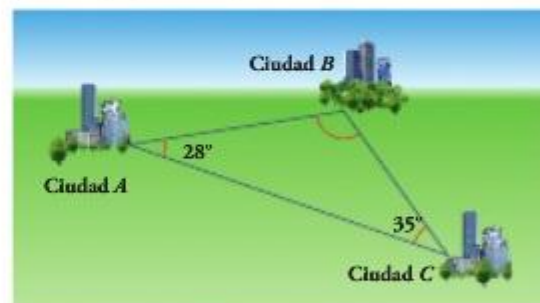
31. Realiza un plano del terreno representando 10 metros como 1 cm.
32. Escribe las medidas de los lados y los ángulos correspondientes.
33. La estructura metálica que se muestra está formada por dos triángulos isósceles. Determina la medida de $\angle B$ y $\angle D$.



C Construye triángulos con las condiciones dadas.

34. Un triángulo equilátero cuyos lados midan 4,8 cm.
35. Un triángulo isósceles que tenga dos lados congruentes de 6,5 cm.
36. Un triángulo escaleno de lados 4 cm, 5,5 cm y 7,2 cm.
37. Un triángulo isósceles y rectángulo cuyos lados iguales midan 3,5 cm.
38. Un triángulo obtusángulo e isósceles cuyo ángulo obtuso mida 120° .

S Usa la información del mapa para resolver la siguiente pregunta. Explica tu razonamiento.



39. Juan llegó a la ciudad B y quiere conocer la ciudad que esté más cerca. Identifica la ciudad que debe visitar Juan.



1.2 Cuadriláteros



Ampliación
multimedia



Actividad

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados, cuatro vértices y cuatro ángulos interiores.

Los elementos de un cuadrilátero son:

- # **Lados opuestos:** son aquellos que no tienen ningún vértice común, por ejemplo, $\overline{FG}$ y $\overline{HI}$.
- # **Lados consecutivos:** son los lados que tienen un vértice en común, por ejemplo, $\overline{FG}$ y $\overline{GH}$.
- # **Ángulos opuestos:** son los ángulos que no tienen ningún lado común, por ejemplo, $\angle F$ y $\angle H$.
- # **Ángulos consecutivos:** son aquellos que tienen un lado común, por ejemplo, $\angle F$ y $\angle G$.



En todo cuadrilátero, la suma de sus ángulos interiores es 360° .

Los cuadriláteros convexos se clasifican de acuerdo con el paralelismo de los lados opuestos. Pueden ser: paralelogramos, trapecios o trapezoides.

Paralelogramos

Los **paralelogramos** son cuadriláteros que tienen paralelos sus dos pares de lados opuestos.

Los paralelogramos se clasifican en rectángulos, cuadrados, rombos y romboide.

Recuerda que...

Dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman 180° .

Rectángulo

Tiene cuatro ángulos rectos.



Rombo

Tiene cuatro lados de igual medida y los ángulos consecutivos diferentes.



Cuadrado

Tiene cuatro lados de igual medida y cuatro ángulos rectos.



Romboide

Tiene los lados y los ángulos consecutivos de diferente medida.



Propiedades de los paralelogramos

En todo paralelogramo se verifican las siguientes propiedades:

- # Los lados opuestos son congruentes, es decir, tienen la misma medida.
- # Los ángulos opuestos son congruentes: $\angle Q \cong \angle S$ y $\angle R \cong \angle T$.
- # Los pares de ángulos consecutivos son suplementarios. Por ejemplo, en el cuadrilátero de la figura 3, $QRST$: $m\angle Q + m\angle R = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$.
- # Cada diagonal lo descompone en dos triángulos congruentes: $\triangle QTS \cong \triangle QRS$.
- # Las diagonales se intersecan en sus puntos medios.

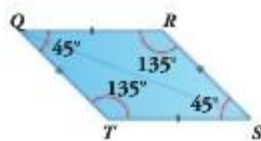


Figura 3.



Construcción de un paralelogramo general

Para construir un romboide o paralelogramo general, si se conoce la medida de dos lados consecutivos AB y AD , junto con el ángulo A que hay entre ellos, se procede así:

1. Se traza un segmento con la medida del lado AB .



3. Con el compás, se toma la medida del lado AD y se traza un arco con centro en A . Luego, se traza el segmento AD .



5. Con el compás, se toma la medida del segmento AD y se traza un arco con centro en B .



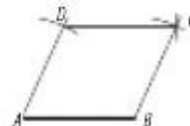
2. Con el transportador, se marca el ángulo A con AB como lado.



4. Con el compás, se toma la medida del segmento AB y se traza un arco con centro en D .



6. Se trazan segmentos desde el punto de intersección de los arcos hasta los extremos de los segmentos.



Trapecios

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelos.

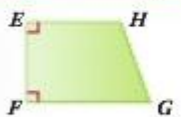
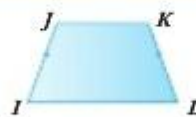
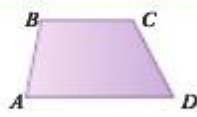
En un trapecio los lados opuestos paralelos se denominan **bases**. La base de mayor longitud se conoce como **base mayor** y la de menor longitud, como **base menor**.

El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio se conoce como **base media**, como se muestra en la figura 4.

La longitud de la base media es la semisuma de las longitudes de las bases.

La altura del trapecio es la medida del segmento perpendicular a una de las bases, trazado desde un punto de la otra base, como se muestra en la figura 5.

Los trapecios se clasifican en:

Trapecio rectángulo	Trapecio isósceles	Trapecio escaleno
 Tiene dos ángulos rectos.	 Los dos lados no paralelos tienen igual medida.	 Tiene los cuatro lados de diferente medida.

En un trapecio isósceles se cumplen las siguientes propiedades:

- Las diagonales son congruentes.
- Los ángulos correspondientes a las bases tienen igual medida.

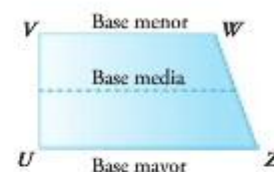


Figura 4.

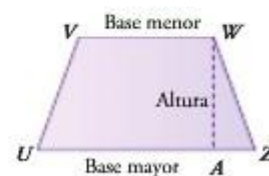


Figura 5.

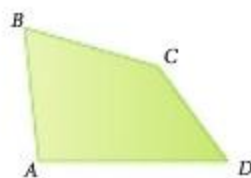


Figura 6.

Trapezoides

Un **trapezoide** es un cuadrilátero convexo en el cual ningún par de lados opuestos es paralelo.

El cuadrilátero $ABCD$ de la figura 6 es un trapezoide.

Los trapezoides se clasifican en simétricos y asimétricos.

Simétricos	Asimétricos
Tiene dos pares de lados congruentes.	No tiene lados congruentes.

El trapezoide simétrico se llama también cometa. En una cometa, la diagonal de mayor longitud se conoce como diagonal principal. La diagonal principal es la bisectriz de los ángulos cuyos vértices une y es perpendicular a la otra diagonal en su punto medio.

Construcción de un trapezoide simétrico

Para construir un trapezoide simétrico $UVWZ$, si se conocen las medidas de una de sus diagonales $\overline{UW}$ y de sus lados $\overline{UV}$ y $\overline{UZ}$, se realizan los siguientes pasos.

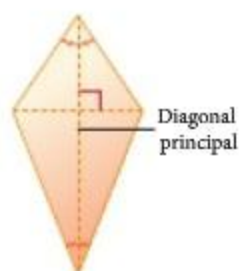
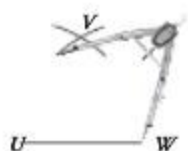


Figura 7.

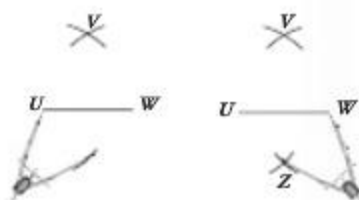
1. Se traza el segmento $\overline{UW}$.

$U \text{ ————— } W$

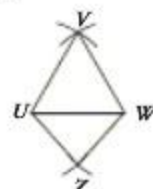
2. Se toma la medida de $\overline{UV}$ con el compás y se trazan arcos con centro en U y con centro en W . Luego, se nombra como V el punto de intersección de los arcos.



3. Se toma la medida de $\overline{UZ}$ con el compás y se trazan arcos al lado opuesto del punto V , con centro en U y con centro en W . Luego, se nombra como Z el punto de intersección de los arcos.



4. Se trazan los segmentos $\overline{UV}$, $\overline{VW}$, $\overline{WZ}$, $\overline{ZU}$.



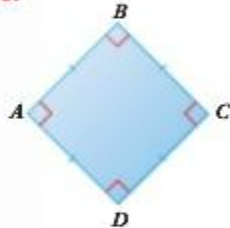


Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **M** Modelo • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Clasifica los siguientes paralelogramos.

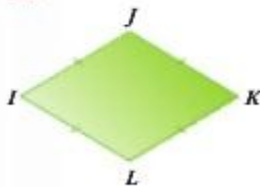
40.



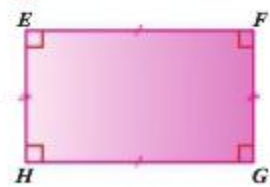
42.



41.



43.



I Completa cada enunciado para que sea verdadero.

44. En todo cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores es _____.

45. Los paralelogramos se clasifican en _____.

46. Los pares de ángulos consecutivos de un paralelogramo son _____.

47. Un _____ es un cuadrilátero que tiene solo un par de lados opuestos paralelo.

48. Un trapecioide es _____ si tiene dos pares de lados congruentes.

R Lee y dibuja en tu cuaderno el cuadrilátero que se describe en cada caso.

49. Para construir un rombo se procede de igual manera que en la construcción de un paralelogramo general, teniendo en cuenta que las medidas de los lados consecutivos son iguales.

50. Un trapecioide asimétrico con dos lados consecutivos de igual medida.

51. Un trapecio escaleno cuya base menor sea la mitad de la base mayor.

E Explica las diferencias entre cada par de cuadriláteros.

52. Romboide y trapecioide simétrico.

53. Trapecio escaleno y trapecioide asimétrico.

R Cada par de segmentos corresponde a las diagonales de un cuadrilátero. Dibuja los cuadriláteros y clasifícalos. Justifica tu respuesta.

54.



56.



55.



57.



M Realiza las siguientes construcciones.

58. Un rombo de 5 cm de lado.

59. Un romboide de lados consecutivos que miden 3 cm y 4 cm.

60. Un trapecio isósceles con bases de 3 cm y 5 cm.

61. Un trapecioide simétrico con diagonal principal de 4 cm y lados de 2,5 cm y 3,5 cm.

P Determina el valor de x en cada figura.

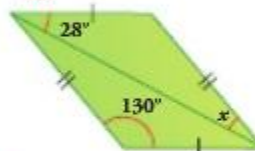
62.



64.



63.



65.



S 66. ¿Cuántos trapecios hay en la figura?





Enlace web



Historia de las matemáticas

Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)



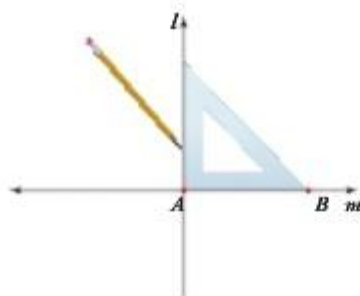
Matemático alemán considerado el "príncipe de las matemáticas". Con tan solo 19 años logró construir un heptadecágono (polígono regular de 17 lados), haciendo uso únicamente de la regla y el compás. Este problema se conocía desde la antigua Grecia, pero pasaron muchos años antes de que el joven Gauss lo resolviera.

Construcción de polígonos regulares con regla y compás

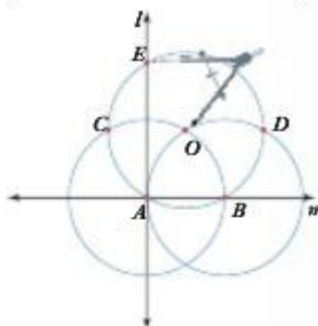
Se atribuye a los griegos la construcción sistemática de diferentes figuras. Para ello, crearon diversas herramientas, entre ellas, la regla y el compás, de tal forma que se consideraba elegante una construcción geométrica que se podía trazar utilizando solo regla y compás. Ejemplos de ellas son las construcciones de la bisectriz de un ángulo o la construcción de los polígonos regulares. El estudio de las construcciones geométricas con regla y compás planteó algunas limitaciones de estas herramientas para construir cualquier figura. Es así como surgen los tres problemas clásicos de la Antigüedad: la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo, construcciones que no se pueden realizar solo con regla y compás.

Para la construcción de polígonos, se sigue un determinado número de pasos basados en el conocimiento de la construcción de rectas paralelas, perpendiculares y ángulos. Por ejemplo, para construir un hexágono regular, de tal manera que sus lados tengan la medida de $\overline{AB}$, se procede así:

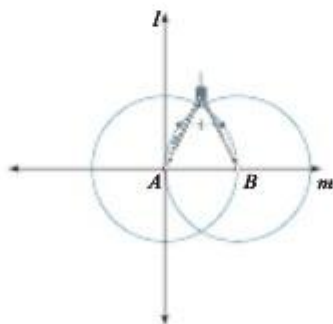
1. Se trazan dos rectas, l y m , que sean perpendiculares. Para ello, se puede utilizar una escuadra. Luego, se ubica $\overline{AB}$ en la recta m .



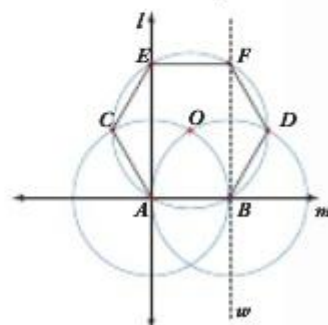
3. Se nombra O el punto de intersección de las circunferencias trazadas en el paso 2. Luego, con centro en O y con la misma abertura del compás, se traza una circunferencia. Se nombran los puntos de intersección C , D y E .



2. Se mide la distancia desde A hasta B con el compás. Luego, con centro en B , se traza una circunferencia. Después, se traza otra circunferencia con centro en A .



4. Se traza una recta w paralela a la recta l que pase por el punto B . El punto de intersección de la recta y la circunferencia trazada en el punto anterior se nombra F . Finalmente, se trazan $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FD}$ y $\overline{DB}$.





2. Circunferencia y círculo



Actividad

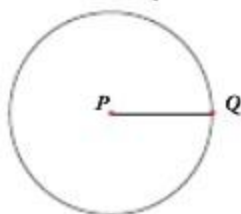


Enlace web

Circunferencia

Centro: P

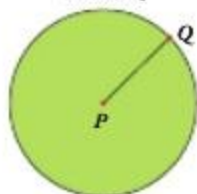
Radio: PQ



Círculo

Centro: P

Radio: PQ



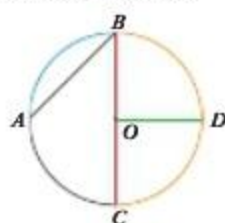
La **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de otro punto llamado centro.

El **círculo** es el conjunto de puntos interiores de una circunferencia.

En la circunferencia se identifican los siguientes elementos:

- # **Centro:** punto del cual equidistan todos los puntos de la circunferencia.
- # **Radio:** segmento cuyos puntos extremos son el centro y un punto de la circunferencia.
- # **Cuerda:** segmento cuyos puntos extremos son dos puntos de la circunferencia.
- # **Diámetro:** cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- # **Arco:** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de esta.
- # **Semicircunferencia:** arco determinado por los extremos de un diámetro.

Por ejemplo, en la circunferencia:



$\overline{AB}$ es una cuerda.

$\widehat{AB}$ es un arco.

$\overline{BC}$ es un diámetro.

$\overline{OD}$ es un radio.

$\widehat{BC}$ es una semicircunferencia.

En un mismo plano, una recta y una circunferencia pueden tener dos puntos comunes, tener un solo punto común o no tener puntos comunes (ver figura 8).

Si la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes, la recta es **secante** a la circunferencia. La recta n es secante a la circunferencia.

Si la recta y la circunferencia solo tienen un punto común, la recta es **tangente** a la circunferencia. La recta m es tangente a la circunferencia.

Si la recta y la circunferencia no tienen ningún punto común, la recta es **exterior** a la circunferencia. La recta p es exterior a la circunferencia.

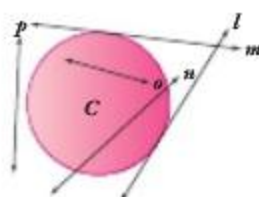


Figura 8.

A continuación se construye una circunferencia que pasa por los dos puntos P y A .

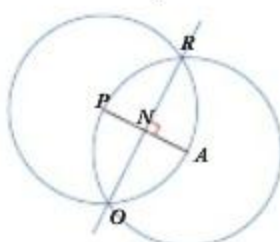
1. Se traza el segmento $\overline{PA}$.



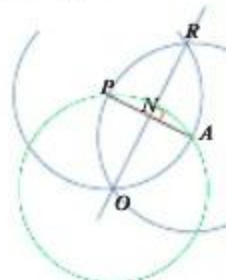
Se traza una perpendicular a $\overline{PA}$ que pase por su punto medio N .



2. Se trazan dos circunferencias de radio $\overline{PA}$, una con centro en P y la otra con centro en A . Se nombran los puntos de intersección O y R .



3. Se traza la circunferencia con centro en O y radio $\overline{OA}$. Esta circunferencia pasa por los puntos P y A .

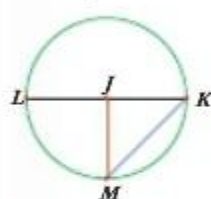




Afianzo COMPETENCIAS

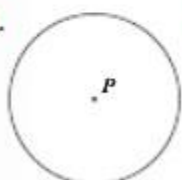
Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Razono

- 80.** Nombra los siguientes elementos de acuerdo con la figura.



Radio: _____
 Cuerda: _____
 Diámetro: _____
 Arco: _____
 Semicircunferencia: _____

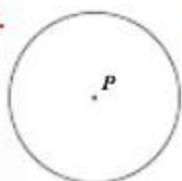
- 81.** Traza cada elemento en la circunferencia.



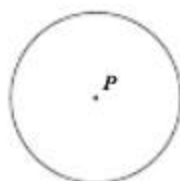
Una cuerda $\overline{AB}$



Un diámetro $\overline{CD}$



Un arco $\widehat{EF}$



Una semicircunferencia $\widehat{GH}$

- 82.** Usa el compás para realizar las siguientes construcciones.

- 85.** Una circunferencia de radio 2,5 cm.
86. Un círculo de 6 cm de diámetro.
87. Dos circunferencias de diferentes radios cuya intersección sea exactamente un punto.
88. Dos circunferencias de igual radio que se intersequen en dos puntos.
89. Dos circunferencias de diferente radio y con el mismo centro.
90. Copia cada par de puntos en tu cuaderno. Luego, traza una circunferencia que pase por los puntos indicados.



- 91.** Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.

- 91.** En una circunferencia se pueden trazar infinitos diámetros.
92. El radio está formado por dos diámetros.
93. Una cuerda es un diámetro.
94. El diámetro es la cuerda mayor.
95. Un diámetro determina dos arcos.

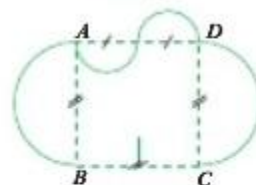
- 96.** Usa regla y compás para realizar las siguientes construcciones.



- 97.**



- 98.**



- 99.** Un carrusel en un parque de diversiones está formado por ocho brazos que sostienen cada caballo. Encuentra la medida del ángulo formado entre dos brazos de la estructura.

- 100.** Realiza la siguiente construcción. Luego, responde.

- Dibuja una circunferencia con centro O .
- Traza un radio $\overline{OP}$ y un rayo $\overline{OQ}$ que pasen por el punto P .
- Traza una perpendicular al rayo $\overline{OQ}$ que pase por el punto P .

- 101.** ¿Cómo es esta recta en relación con la circunferencia de centro O ?



Historia de las matemáticas

A lo largo de la historia han existido diferentes unidades para medir longitudes. Por ejemplo, los codos y los pasos. Dado que estas medidas variaban de acuerdo con la persona que hacía las mediciones fue necesario crear unidades patrón de medida.

La primera unidad patrón, el codo maestro de granito negro, se construyó en Egipto y se usó para construir varas de un codo de longitud.



En Roma, se medían distancias en unidades llamadas pasos, que correspondían a cinco pies romanos; mil de estas unidades, correspondían a una *milla passuum*, la cual dio origen a la milla náutica.

3. Longitud



Actividad

La **longitud** es una magnitud que se mide en una dimensión, como el ancho, el largo, la altura y la distancia.

Para realizar medidas se utiliza el Sistema Internacional (SI), cuya base corresponde al Sistema Métrico Decimal (SMD), que es un conjunto de unidades de medida que aumentan o disminuyen en potencias de 10. En el Sistema Métrico Decimal se define el metro, entre otras unidades, como unidad básica de medida para la longitud.

En 1795, el metro se definió como la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre. Sin embargo, en 1983 fue cambiada la definición de metro a “la longitud recorrida por un rayo de luz que viaja en el vacío en un lapso de tiempo igual a $\frac{1}{299.792.458}$ de segundo”.

3.1 Unidades métricas de longitud

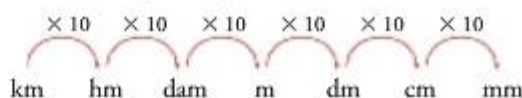
El **metro** es la unidad básica de medida de longitud y se simboliza **m**.

En el Sistema Métrico Decimal (SMD), las unidades superiores al metro se denominan **múltiplos**, las unidades inferiores al metro se denominan **submúltiplos**. Tanto los múltiplos como los submúltiplos se expresan en metros utilizando potencias de 10, como se muestra en la siguiente tabla.

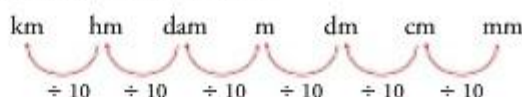
Múltiplos			Unidad básica	Submúltiplos		
Kilómetro	Hectómetro	Decámetro	Metro	Decímetro	Centímetro	Milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
10^3 m	10^2 m	10^1 m	1	10^{-1} m	10^{-2} m	10^{-3} m
1.000 m	100 m	10 m		0,1 m	0,01 m	0,001 m

3.2 Conversiones

Para convertir una medida expresada en una unidad a otra, se debe tener en cuenta que cada unidad de medida es 10 veces mayor que la inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior. Por tanto, para hallar la equivalencia de una unidad de orden superior a una unidad de orden inferior se multiplica por 10, 100, 1.000, como se muestra en el siguiente gráfico:



Para hallar la equivalencia de una unidad de orden inferior en una unidad de orden superior, se divide entre 10, 100, 1.000, así:





3.3 Otras unidades de longitud

Existe otro sistema de unidades de medida que se utiliza usualmente en la navegación, en la aviación, en partes de maquinaria y en herramientas industriales. Dicho sistema de medidas es utilizado en países como Estados Unidos e Inglaterra y se conoce como el sistema anglosajón de medidas. Sus unidades básicas de medida son la pulgada, el pie, la yarda y la milla. La siguiente tabla muestra la equivalencia de estas unidades de medida en el Sistema Métrico Decimal.

Unidad	Símbolo	Equivalencia
Pulgada	pul	2,54 cm
Pie	p	30,48 cm
Yarda	yd	91,44 cm
Milla	mi	1.609,347 m
Milla náutica	nmi	1.852 m

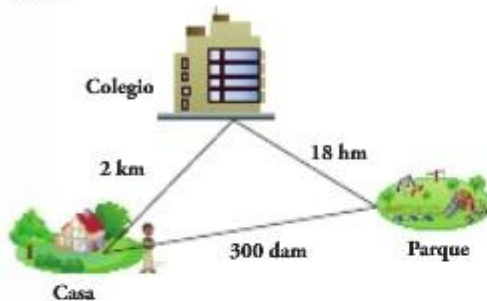
Para realizar conversiones entre medidas expresadas en el Sistema Métrico Decimal y el sistema anglosajón, se usan las equivalencias entre unidades y se plantea una regla de tres simple directa. Con estas equivalencias es posible realizar conversiones entre cantidades expresadas en uno u otro sistema.

Recuerda que...

El uso de una determinada unidad de medida depende de la longitud del objeto que se mida. Así, las dimensiones de un celular suelen expresarse en centímetros, tales como alto: 11,52 cm, ancho: 5,86 cm, fondo: 0,93 cm. En cambio, la distancia que se debe recorrer de una ciudad a otra se expresa en kilómetros, por ejemplo, la distancia entre Medellín y Tunja es de 427,2 km.

EJEMPLOS

1. Determinar la distancia en metros que debe recorrer Juan para realizar el circuito casa - parque - colegio - casa.



Para determinar esta distancia se requiere convertir cada longitud a metros, como sigue:

$$18 \text{ hm} = 18 \times 100 = 1.800 \text{ m}$$

$$300 \text{ dam} = 300 \times 10 = 3.000 \text{ m}$$

$$2 \text{ km} = 2 \times 1.000 = 2.000 \text{ m}$$

Luego, se suman las longitudes:

$$1.800 + 3.000 + 2.000 = 6.800$$

Por tanto, la distancia que debe recorrer Juan para realizar el circuito es de 6.800 m.

2. Las 500 millas de Daytona es una de las carreras de automovilismo más importantes de los Estados Unidos. ¿Cuántos kilómetros recorren los pilotos en esta carrera?



Primero, se escribe la equivalencia de la unidad del sistema anglosajón en el Sistema Métrico Decimal.

$$1 \text{ milla} = 1.609,347 \text{ m}$$

Luego, se plantea la regla de tres.

$$1 \text{ mi} \quad 1.609,347 \text{ m}$$

$$500 \text{ mi} \quad x$$

De donde

$$x = \frac{500 \text{ mi} \times 1.609,347 \text{ m}}{1 \text{ mi}} = 804.673,5 \text{ m}$$

Finalmente, se realizan las conversiones de metros a kilómetros, dividiendo entre 1.000, así:

$$804.673,5 \text{ m} \div 1.000 = 804,6735 \text{ km}$$

Por tanto, las 500 millas de Daytona equivalen a 804,67 km, aproximadamente.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** 102. Explica los pasos para realizar la conversión entre unidades de longitud.

E Expresa cada unidad de medida en metros.

103. 1 km = _____ m 108. 1 hm = _____ m

104. 1 dam = _____ m 109. 1 pul = _____ m

105. 1 p = _____ m 110. 1 yd = _____ m

106. 1 dm = _____ m 111. 1 mm = _____ m

107. 1 mi = _____ m 112. 1 cm = _____ m

- R** Marca con una X la unidad adecuada para medir cada objeto o lugar:

113. La longitud de un lápiz mm cm m

114. Tu estatura cm m km

115. La altura de un árbol m km mm

116. El grosor de una moneda hm cm mm

117. El perímetro de una cancha m mm cm

118. La distancia entre dos ciudades m cm km

E Realiza las siguientes conversiones.

119. 34,5 km a m 123. 2,75 m a cm

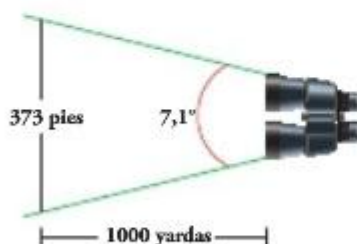
120. 5 hm a cm 124. 48 cm a dam

121. 0,35 m a mm 125. $\frac{3}{5}$ m a cm

122. 4,5 m a km 126. 4,5 km a m

- S** Lee y resuelve. Luego, explica cada procedimiento.

Algunos modelos de binoculares tienen un campo visual lineal que equivale a la distancia real que alcanza el binocular observando a una distancia de 1.000 yd. Por ejemplo, para el binocular que se muestra a continuación, el campo visual lineal es de aproximadamente 373 pies.



127. Expresa en metros la distancia de observación y el campo visual lineal del binocular.

- S** Un avión comercial vuela entre 33.000 pies y 40.000 pies de altura. El Concorde era un avión supersónico para el transporte de pasajeros que alcanzaba una altura de 59.000 pies.



128. Expresa cada medida en metros.

- S** Lee y resuelve.

129. En la ciudad de Moteji se corren las 300 millas de Japón. Expresa esta distancia en metros y en kilómetros.

130. Juan se encuentra manejando su automóvil importado por la carretera. Si el velocímetro marca una velocidad de 45 millas por hora y ve la señal, explica si Juan sobrepasó el límite de velocidad permitido.



- P** Cada año se realiza la media maratón de Bogotá. Esta competencia, que ya aparece en el calendario de la IAAF, tiene un recorrido de 21 km.

Dos amigas participaron en la maratón: Luisa recorrió 12 km, 60,8 hm y 98 dam y Laura recorrió los $\frac{4}{5}$ del recorrido total.

131. ¿Cuántos metros recorrió cada una?

132. ¿Cuántos metros les faltaron a Luisa y a Laura para llegar a la meta?

- S** Lee la información. Luego, resuelve.

El consumo de millas por galón (mpg) del automóvil de Carolina es el siguiente:

Ciudad: 27 Autopista: 35 Combinado: 30,6

133. Determina el consumo aproximado de gasolina en el trayecto de Bogotá a Santa Marta pasando por Medellín, si se sabe que la distancia de Bogotá a Medellín es de 414 km y la distancia de Medellín a Santa Marta es de 840 km.

134. La longitud de una vuelta ciclista es de 47,5 km, 38,5 dam y 487 m. Un ciclista ha recorrido 25,4 km y 48 hm. ¿Cuántos kilómetros le faltan por recorrer?



3.4 Perímetro



Actividad

El **perímetro** de un polígono es la suma de las medidas de todos los lados que lo conforman. El perímetro se representa por P .

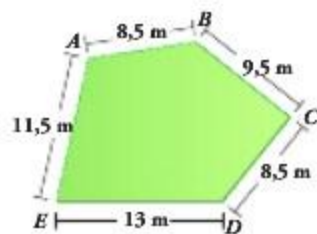
Para hallar el perímetro de un polígono se suman las longitudes de sus lados. Por ejemplo, Luis desea conocer la cantidad de metros de alambre necesarios para cercar su finca, cuyo plano se muestra en la figura.

Para determinar la cantidad de alambre necesario para cercar la finca, se halla el perímetro como sigue:

$$P = AB + BC + CD + DE + EA$$

$$P = 8,5 + 9,5 + 8,5 + 13 + 11,5 = 51$$

Por tanto, la cantidad de alambre en metros que necesita Luis para cercar la finca es 51 m.



Para calcular el perímetro es necesario que todas las medidas se encuentren dadas en las mismas unidades. De no ser así, se deben convertir todas las medidas a una misma unidad antes de calcular el perímetro.

Perímetro de un polígono regular

Para calcular el perímetro de un polígono regular (P), se multiplica la medida de uno de sus lados por la cantidad de lados. Así: $P = n \times l$

Donde, n es el número de lados y l es la medida del lado.

Por ejemplo, para calcular el perímetro de un heptágono regular, si cada lado mide 6,5 m, se procede así:

$$P = n \times l \quad \text{Se aplica la fórmula para hallar el perímetro.}$$

$$P = 7 \times 6,5 = 45,5 \quad \text{Se reemplazan los valores de } n \text{ y } l \text{ y se multiplica.}$$

Por tanto, el perímetro de la figura es 45,5 m.

Longitud de una circunferencia

Para calcular la longitud de una circunferencia (C), se multiplica dos veces el radio de la circunferencia por el número π . Así: $C = 2\pi r$

Donde C es la longitud, r es el radio y π es una constante cuyo valor aproximado es 3,1416.

Por ejemplo, para calcular la longitud de una circunferencia de radio 4 cm se procede así:

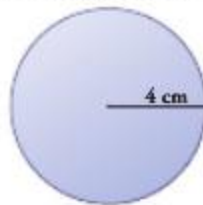
$$C = 2\pi r \quad \text{Se aplica la fórmula para hallar el perímetro.}$$

$$C = 2 \times 3,1416 \times 4 \quad \text{Se reemplazan los valores de } \pi \text{ y } r.$$

$$C = 25,1328 \approx 25,13 \quad \text{Se multiplica.}$$

Por tanto, la longitud de la circunferencia es aproximadamente 25,13 cm.

Como el diámetro es dos veces el radio ($2r$), entonces, la longitud de la circunferencia es igual al producto de su diámetro por el número π . Es decir, $C = \pi d$, donde d es el diámetro de la circunferencia.



Historia de las matemáticas

Número π

Alrededor de 1700 a. C., ya se había encontrado la relación entre la circunferencia y su diámetro, pero solo hasta el siglo XVII esta relación se convirtió en un número, llamado número π . Nombre dado por los griegos, quienes llamaban *periphēria* (περιφέρεια) a la circunferencia de un círculo.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Explica:

135. ¿Cómo calcular el perímetro de un polígono regular?
136. ¿Cómo calcular la longitud de una circunferencia?

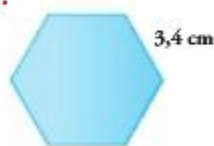
Calcula el perímetro de cada polígono regular.

137.



2,5 cm

139.



3,4 cm

138.



43,5 cm

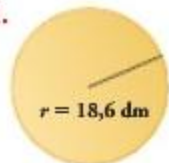
140.



8,9 m

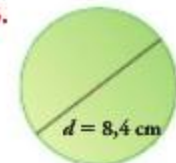
Halla la longitud de las siguientes circunferencias.

141.



$r = 18,6 \text{ dm}$

143.



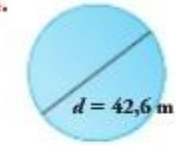
$d = 8,4 \text{ cm}$

142.



$r = 13,5 \text{ cm}$

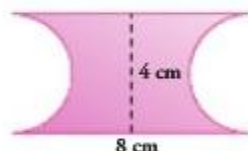
144.



$d = 42,6 \text{ m}$

Determina el perímetro de cada figura.

145.



4 cm

8 cm

146.



4 cm

Lee y resuelve.

147. Carlos tiene una cuerda. Si forma una circunferencia de 40 cm de radio, ¿cuántos metros mide la cuerda?

148. Una cancha de fútbol mide 120 m de largo por 90 m de ancho, mientras que el campo de juego de fútbol americano mide 360 pies de largo por 160 pies de ancho. Determina la diferencia en metros entre los perímetros de las dos canchas.



149. Se quiere cercar el borde de un kiosco que tiene forma de hexágono regular cuyo lado mide 3 m. Determina el costo total de la cerca si cada metro vale \$15.000.
150. En un parque de diversiones, Jimena se sentó en un carrusel a 4,5 m del centro de giro. Determina la distancia recorrida al terminar de dar 20 vueltas.
151. Catalina debe realizar un recorrido en su bicicleta desde su casa hasta el parque, en el trayecto recorrido las ruedas de su bicicleta dan 600 vueltas. Halla la distancia de su casa al parque si se sabe que cada rayo de la bicicleta mide 40 cm.



152. Pedro está elaborando figuras para adorar la cartelera del salón de clase. Para esto construyó pentágonos regulares de 50 cm de perímetro. Luego, trazó semicircunferencias sobre cada lado. Si desea colocar un adorno alrededor de cada figura y en total requiere ocho figuras, ¿cuántos metros de adorno necesita?

Lo que viene...

A continuación trabajarás el tema de áreas de polígonos. Determina el área de un cuadrado de 4,5 cm de lado. Explica el procedimiento.

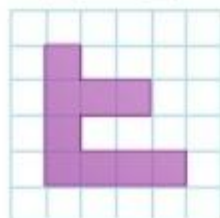


4. Área

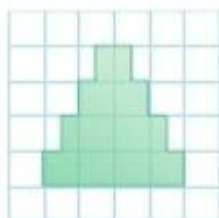
Ampliación
multimediaRecurso
imprimible

El **área** de una figura es la medida de la superficie que ocupa la figura. El área se simboliza con la letra A .

Para determinar el área de una figura se elige una unidad cuadrada y se cuenta la cantidad de estas unidades necesaria para recubrir la figura. Este procedimiento se llama recubrimiento. Por ejemplo, si $\square$ se considera como la unidad cuadrada, se tiene que:



$$A = 9u^2$$



$$A = 10u^2$$

El área tiene las siguientes propiedades:

- El área de una figura es un único número positivo que depende de la unidad elegida.

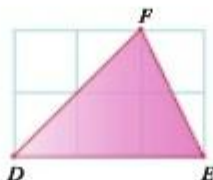
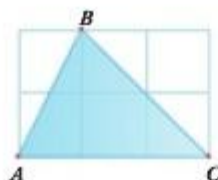
El área de la siguiente figura es:



$$5 \square = 10 \triangle$$

- Si dos polígonos son congruentes, entonces, sus áreas son iguales.

Por ejemplo, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, por tanto, $A_{\triangle ABC} = A_{\triangle DEF}$.



- Si una figura es la reunión de varias regiones que no se solapan, entonces, el área de la figura es igual a la suma de las áreas de dichas regiones.

Por ejemplo, para determinar el área de la figura se suman las áreas de las regiones que la conforman.

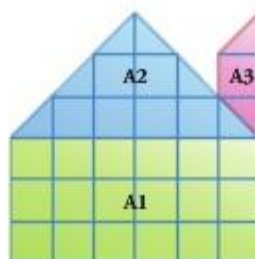
Así, si $\square$ $1u^2$ es la unidad de medida, se tiene:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$A = 18u^2 + 9u^2 + 2u^2$$

$$A = 29u^2$$

Por tanto, el área de la superficie de la figura es 29 unidades cuadradas.



Recuerda que...

Dos regiones no se solapan si no se intersecan o si se intersecan, a lo sumo, en un segmento. Por ejemplo:



Regiones solapadas



Regiones no solapadas



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **P** Propongo • **M** Modelo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Explica:

153. Qué es área de una figura.

154. Qué es cálculo del área por recubrimiento.

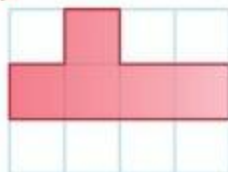
155. Cuáles son las propiedades del área.

E Determina el área de cada figura. Usa la cuadrícula como unidad de medida.

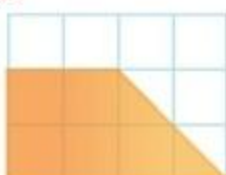
156.



159.



157.



160.



158.



161.



O Observa cada figura y determina el área de cada triángulo. Luego, establece la relación entre el área del triángulo y el área de cada rectángulo o cuadrado que lo contiene.

162.



165.



163.



166.



164.



167.



R Las siguientes figuras se han dividido en triángulos y rectángulos. Determina el área de cada figura.

168.

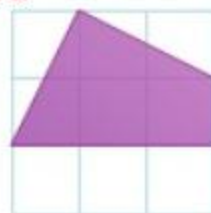


169.

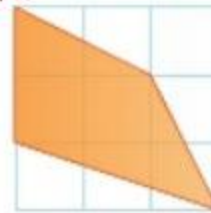


R Divide convenientemente cada figura en triángulos y rectángulos. Luego, halla su área.

170.



171.



M Expresa el área de cada figura en las dos unidades de medida dadas.

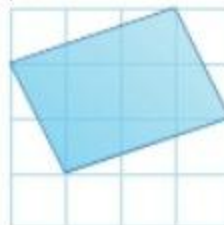


Unidad cuadrada 1

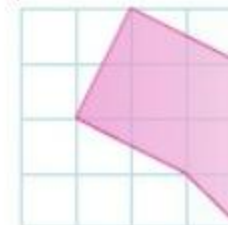


Unidad cuadrada 2

172.



174.



173.



175.



S Dibuja, en una cuadrícula, figuras que tengan las siguientes áreas. Usa el cuadrado como unidad de medida. $1 u^2$

176. $\frac{1}{2} u^2$

179. $2u^2$

182. $5\frac{1}{2} u^2$

177. $7u^2$

180. $\frac{3}{2} u^2$

183. $12u^2$

178. $7,5u^2$

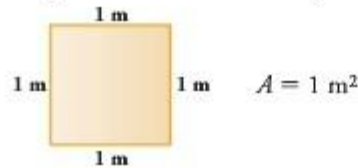
181. $3\frac{1}{4} u^2$

184. $20u^2$



4.1 Unidades métricas de área

La unidad fundamental de área es el **metro cuadrado** y se simboliza por **m²**, que corresponde a la medida de la superficie de un cuadrado cuyo lado mide 1 m.



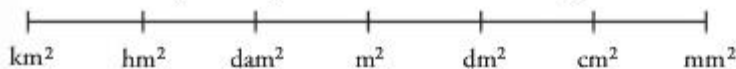
El metro cuadrado tiene unidades de orden superior llamadas múltiplos y unidades de orden inferior denominadas submúltiplos.

Así, para nombrar los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado se usan los mismos nombres de las unidades de longitud y se acompañan de la palabra cuadrado, como se muestra en las siguientes tablas:

Múltiplos	abreviaturas	Equivalencia
Kilómetro cuadrado	km ²	1.000.000 m ²
Hectómetro cuadrado	hm ²	10.000 m ²
Decámetro cuadrado	dam ²	100 m ²

Submúltiplos	Abreviatura	Equivalencia
Decímetro cuadrado	dm ²	0,01 m ²
Centímetro cuadrado	cm ²	0,0001 m ²
Milímetro cuadrado	mm ²	0,000001 m ²

Las unidades de área se pueden representar de acuerdo con la siguiente escala:

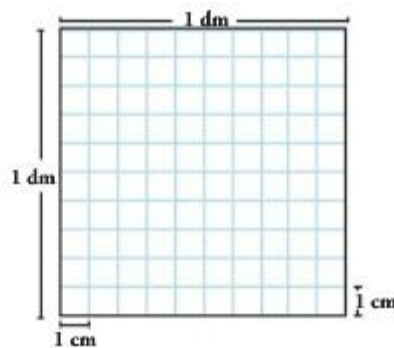


Donde cada unidad es 100 veces mayor respecto a la unidad inmediatamente inferior, como se muestra a continuación.

En la figura, se divide un decímetro cuadrado en 100 centímetros cuadrados. Por tanto, se concluye que: $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$.

Aplicando un razonamiento similar, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km}^2 &= 100 \text{ hm}^2 \\ 1 \text{ hm}^2 &= 100 \text{ dam}^2 \\ 1 \text{ dam}^2 &= 100 \text{ m}^2 \\ 1 \text{ m}^2 &= 100 \text{ dm}^2 \\ 1 \text{ cm}^2 &= 100 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$





Actividad

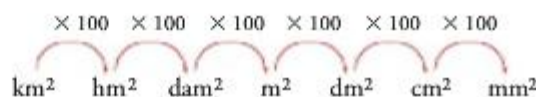


Conversiones de unidades de área

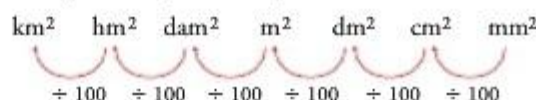
Los múltiplos y los submúltiplos del metro cuadrado pueden expresarse como potencias de 10, con lo cual es posible realizar la conversión de una unidad de medida de área a otra.

Múltiplos			Unidad básica	Submúltiplos		
km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
10 ⁶	10 ⁴	10 ²	10 ⁰	10 ⁻²	10 ⁻⁴	10 ⁻⁶

Cada potencia de 10 se expresa en metros cuadrados y cada unidad de área es 100 veces mayor que la inmediatamente inferior y 100 veces menor que la inmediatamente superior. Así, para determinar la equivalencia de una unidad de orden superior a una unidad de orden inferior se multiplica por 100, 10.000, 1.000.000, etc.



Para hallar la equivalencia de una unidad de orden inferior a una unidad de orden superior, se divide entre 100, 10.000, 1.000.000, etc.

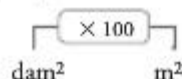


EJEMPLOS

1. Realizar cada conversión a la unidad indicada.

a. 18,124 dam² a m².

Al realizar la conversión de la unidad de orden superior dam² a la unidad de orden inferior m², se debe multiplicar por 100, pues hay un lugar entre dam² y m². Luego, la equivalencia de 18,124 dam² a m² es:

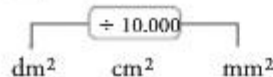


$$18,124 \times 100 = 1.812,4$$

Por tanto, 18,124 dam² = 1.812,4 m².

b. 793,2 mm² a dm².

Para realizar la conversión de la unidad mm² a la unidad de orden superior dm², se debe dividir entre 10.000, pues hay dos lugares entre mm² y dm². Luego, la equivalencia de 793,2 mm² a dm² es:



$$793,2 \div 10.000 = 0,07932$$

Por tanto, 793,2 mm² = 0,07932 dm².

2. Mariana decide cambiar el piso de su habitación, para tal fin compró baldosas de 900 cm². ¿Cuántas baldosas son necesarias para cubrir la superficie del piso, si tiene un área de 9 m²?



Primero, se convierte 9 m² a cm² así:

$$9 \times 10.000 = 90.000 \quad \text{Se multiplica por 10.000.}$$

Luego, el área de la superficie del piso es: 90.000 cm².

Ahora, se divide el área de la superficie del piso entre el área de la superficie de cada baldosa, como sigue:

$$90.000 \div 900 = 100 \quad \text{Se divide entre 900.}$$

Por tanto, Mariana necesita 100 baldosas para cubrir la superficie del piso de su alcoba.



4.2 Unidades agrarias



Actividad

Para medir las extensiones de los campos, cultivos, pastizales, granjas, etc., se emplean otras unidades de superficie, denominadas **unidades agrarias**. Las unidades agrarias son el área, la hectárea y la centiárea. La siguiente tabla muestra la equivalencia de estas unidades de medida en el Sistema Métrico Decimal.

Nombre	Abreviatura	Equivalencia
Hectárea	ha	$1 \text{ hm}^2 = 10.000 \text{ m}^2$
Área	a	$1 \text{ dam}^2 = 100 \text{ m}^2$
Centiárea	ca	1 m^2

Otra unidad usada con frecuencia para medir superficies agrarias es la **fanegada**, que corresponde a 6.400 m^2 , es decir, al área de un cuadrado cuyo lado mide 80 m .

Para realizar conversiones entre este tipo de unidades se tienen en cuenta estas nuevas equivalencias y se procede como con las otras unidades de superficie.

EJEMPLOS

- El área de un terreno es de 80 km^2 . Si $\frac{3}{5}$ del terreno se siembra con árboles frutales y el resto se destina para vivienda y diversión, ¿cuántas hectáreas del terreno no se siembran con árboles frutales?



Primero, se expresa 80 km^2 en m^2 . Así:

$$80 \times 1.000.000 = 80.000.000$$

Luego, el terreno cuenta con $80.000.000 \text{ m}^2$.

Ahora, se establece la parte del terreno que no está sembrado con árboles frutales.

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \quad \text{Se resta } \frac{3}{5} \text{ de la unidad.}$$

Luego, se calcula el área.

$$\frac{2}{5} \text{ de } 80.000.000 = \frac{2 \times 80.000.000}{5} = 32.000.000$$

Por último, se convierte $32.000.000 \text{ m}^2$ a hectáreas.

Así que no se siembran con árboles frutales

$$32.000.000 \div 10.000 = 3.200.$$

Finalmente, el terreno tiene 3.200 ha que no están sembradas con árboles frutales.

- Leer los siguientes avisos publicitarios. Luego, responder.

Se vende finca ganadera

Área: $49,80 \text{ ha}$

Valor: $\$60.000.000$ cada hectárea.

Vendo finca cafetera

Área: 450.000 m^2

Valor: $\$7.000$ cada m^2 .

- ¿Cuál de los dos terrenos tiene mayor área?

Para determinar cuál terreno tiene mayor área se expresan sus medidas en la misma unidad de área.

$$49,80 \text{ ha} = 49,80 \text{ hm}^2 = 49,80 \times 10.000 \text{ m}^2$$

$$\text{Luego, } 49,80 \text{ ha} = 498.000 \text{ m}^2.$$

Por tanto, la finca ganadera tiene una mayor área, ya que 498.000 m^2 es mayor que 450.000 m^2 .

- ¿Cuál de las dos opciones es la más conveniente?

La opción más conveniente se obtiene calculando el valor de cada finca para la misma unidad, así:

Finca ganadera:

$$60.000.000 \div 10.000 = 6.000$$

Costo por m^2 : $\$6.000$

Finca cafetera:

$$\text{Costo por } \text{m}^2: \$7.000$$

Por tanto, el valor por m^2 de la finca ganadera es más conveniente, ya que su valor por m^2 es menor.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Completa cada enunciado para que sea verdadero.

185. La unidad básica de medida de área es _____.

186. Los múltiplos del metro cuadrado son _____.

187. El procedimiento para convertir una medida expresada en hm^2 a m^2 es _____.

188. El procedimiento para convertir una medida expresada en cm^2 a dam^2 es _____.

189. La diferencia entre superficie y área es _____.

E Realiza las siguientes conversiones.

190. 2 m^2 a cm^2 196. $0,76 \text{ cm}^2$ a mm^2

191. 7 dam^2 a dm^2 197. 69 cm^2 a dam^2

192. $2,7 \text{ dm}^2$ a mm^2 198. 965 m^2 a km^2

193. 8 hm^2 a km^2 199. 10 hm^2 a cm^2

194. 2.340 mm^2 a cm^2 200. $5,6 \text{ dam}^2$ a mm^2

195. 745 m^2 a hm^2 201. $7,8 \text{ mm}^2$ a m^2

I Escribe las equivalencias de las unidades agrarias en m^2 .

202. $1 \text{ ha} =$ _____ m^2

203. $1 \text{ ca} =$ _____ m^2

204. $1 \text{ a} =$ _____ m^2

205. $1 \text{ fanegada} =$ _____ m^2

E Realiza las siguientes equivalencias.

206. $3,5 \text{ ha}$ a m^2 211. $3,5 \text{ km}^2$ a m^2

207. 84 a a dam^2 212. $\frac{1}{4} \text{ km}^2$ a a

208. 35 ha a ca 213. $8,5 \text{ a}$ a m^2

209. $0,035 \text{ hm}^2$ a a 214. 2.328 ha a m^2

210. 9 km^2 a ca 215. 216 ha a km^2

R Realiza las siguientes operaciones.

216. $0,15 \text{ km}^2 - 1,53 \text{ mm}^2$

217. $3.150 \text{ dm}^2 - 15 \text{ m}^2$

218. $0,21 \text{ dam}^2 - 1.510 \text{ cm}^2$

219. $0,25 \text{ hm}^2 - 41.000 \text{ mm}^2$

220. $2.470 \text{ dm}^2 - 4,56 \text{ m}^2$

R 221. Completa la siguiente tabla. Luego, responde.

Parque	ha	m^2	km^2
Parque Simón Bolívar	113		
Parque Nacional			2,83
Parque de los novios	23		
Parque El Tunal		560.000	

222. ¿Cuál es el parque de mayor área?

223. ¿Cuál es el parque de menor área?

224. ¿Cuál es la diferencia en m^2 entre el área del parque de mayor área y el del menor área?

S Lee y resuelve.

La Federación de Cafeteros va a dar 1 bulto de abono por fanegada, como incentivo a los cultivadores de café. Para esto, necesitan conocer el área de las cuatro fincas con mayor producción de café tipo exportación. De acuerdo con los siguientes datos, determina la cantidad de bultos de abono que recibe cada finca.

225. Finca la Esperanza: 640 dam^2

226. Finca El Recreo: $9,6 \text{ dam}^2$

227. Finca El Remanso: $0,0512 \text{ km}^2$

228. Finca Villa Luna: 57.000 m^2

El Sistema de Parques Nacionales está formado por 56 parques con una extensión de $12.602.320,7 \text{ ha}$ en total. El parque más pequeño, isla de la Corota, tiene una extensión de $0,16 \text{ km}^2$ y el más grande, Sierra de Chiribiquete, tiene una extensión de 12.800 km^2 .

229. Determina la diferencia en centiáreas entre estos dos parques.

230. Halla la extensión en km^2 que corresponde a los parques restantes.

231. José compró una parcela de 5 hectáreas mineras y quiere dividirla en 10 lotes de igual área. ¿Cuántos metros cuadrados tiene cada lote?





4.3 Área de polígonos



Ampliaciones multimedia



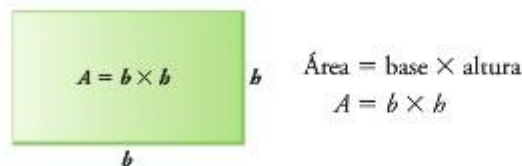
Enlace web

El **área de un polígono** se puede calcular sin necesidad de utilizar recubrimiento. Para esto se utilizan determinadas expresiones en las cuales es necesario conocer las medidas de algunos elementos del polígono. Dichas expresiones se presentan a continuación.

Área de cuadriláteros

Para calcular el área de un cuadrilátero se aplica alguna de las siguientes expresiones, según el tipo de cuadrilátero.

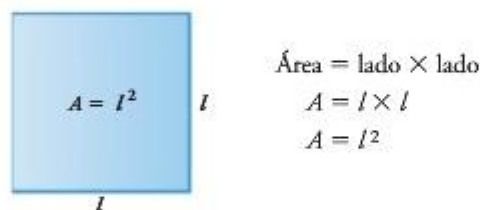
- El **área de un rectángulo** es igual al producto de la medida de la longitud de su base por la medida de la longitud de su altura. Es decir:



Por ejemplo, el área de un rectángulo cuya base es 8 dm y cuya altura es 5 dm, se calcula así: $A = b \times h = 8 \times 5 = 40$

Por tanto, el área del rectángulo es 40 dm².

- El **área de un cuadrado** es igual al cuadrado de la medida de su lado. Es decir:



Por ejemplo, el área de un cuadrado cuyo lado mide 7 cm, se determina así:

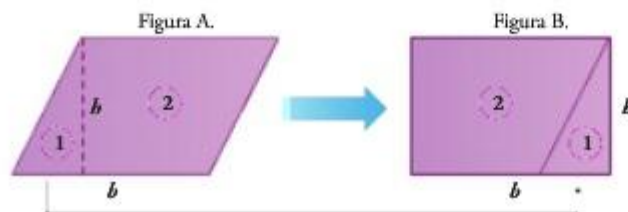
$$A = l \times l = 7 \times 7 = 49$$

Por tanto, el área del cuadrado es 49 cm².

- El **área de un romboide** es igual al producto de la medida de la base por la medida de la altura. Es decir: $A = \text{base} \times \text{altura} = b \times h$

Para deducir esta fórmula se considera un paralelogramo de base b y altura h .

Luego, observa que el área del paralelogramo de base b y altura h (figura A) es igual al área de un rectángulo de base b y altura h (figura B):



Por ejemplo, el área de un romboide cuya altura es 11 dm y cuya base es 12 dm, se halla así: $A = b \times h = 11 \times 12 = 132$

Por tanto, el área del romboide es 132 dm².

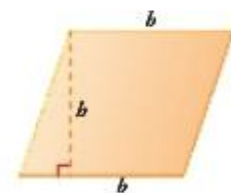
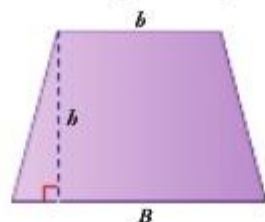


Figura 9.



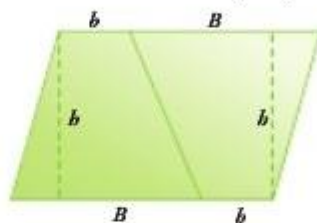
- El **área de un trapecio** es igual al semiproducto de la suma de las bases por la altura.



$$\text{Área} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

En la figura se puede verificar que un trapecio corresponde a la mitad de un paralelogramo cuya base es igual a la suma de la base mayor y la base menor del trapecio.

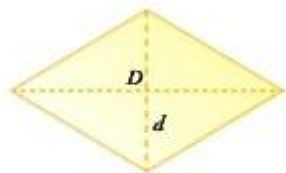


Por ejemplo, el área de un trapecio, si sus bases miden 12 cm y 7 cm y su altura mide 9 cm, es:

$$A = \frac{(B + b) \times h}{2} = \frac{(12 + 7) \times 9}{2} = \frac{19 \times 9}{2} = 85,5$$

Por tanto, el área del trapecio es 85,5 cm².

- El **área de un rombo** es igual al semiproducto de la medida de la diagonal mayor (D) por la medida de la diagonal menor (d).



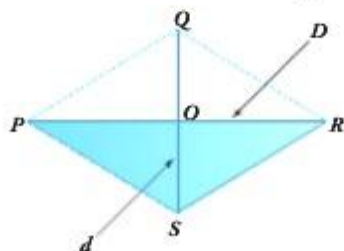
$$\text{Área} = \frac{1}{2} (\text{diagonal mayor} \times \text{diagonal menor})$$

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

En la figura se observa que al trasladar $\triangle SOR$ y $\triangle PSO$, se obtiene un rectángulo cuya base es D y cuya altura es $\frac{1}{2}d$. Así que:

$$A = D \times \frac{1}{2}d$$

$$A = \frac{D \times d}{2}$$



Por ejemplo, el área de un rombo cuyas diagonales miden 10 dm y 7 dm, se calcula como sigue:

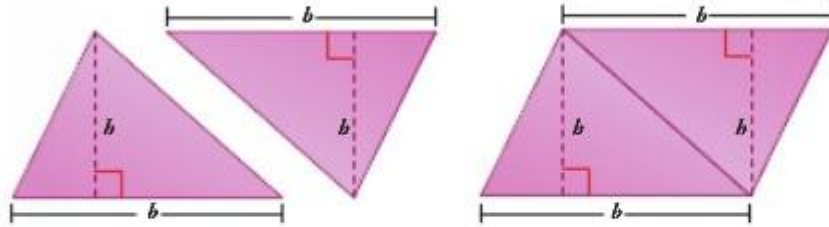
$$A = \frac{D \times d}{2} = \frac{10 \times 7}{2} = 35$$

Por tanto, el área del rombo es 35 dm².



Área de un triángulo

Considera dos triángulos congruentes de base b y altura h . Estos dos triángulos forman un paralelogramo de base b y altura h .



El **área de un triángulo** es igual a la mitad del producto de la medida de la base por la medida de la altura. Es decir:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{b \times h}{2}$$

Por ejemplo, el área de un triángulo cuya altura es 4,5 cm y su base es 3 cm, se calcula así:

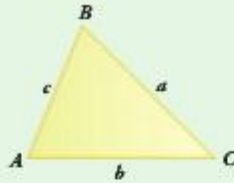
$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{4,5 \times 3}{2} = \frac{13,5}{2} = 6,75$$

Por tanto, el área del triángulo es 6,75 cm².

■ Fórmula de Herón

En algunos casos se requiere calcular el área de un triángulo, conociendo solo la medida de sus tres lados. En estos casos se utiliza la fórmula de Herón.

Si las medidas de los lados del $\triangle ABC$ son a , b y c , la fórmula de Herón establece que:



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Por ejemplo, para calcular el área del $\triangle ABC$ teniendo en cuenta las medidas dadas, se realiza el siguiente procedimiento:

Primero, se calcula s :

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4,5 \text{ cm} + 4,7 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 6,1 \text{ cm}$$

Luego, se calcula $s-a$, $s-b$, $s-c$:

$$s-a = 6,1 \text{ cm} - 4,5 \text{ cm} = 1,6 \text{ cm}$$

$$s-b = 6,1 \text{ cm} - 4,7 \text{ cm} = 1,4 \text{ cm}$$

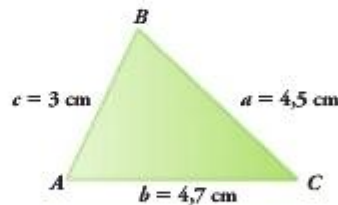
$$s-c = 6,1 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 3,1 \text{ cm}$$

Finalmente, se aplica la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

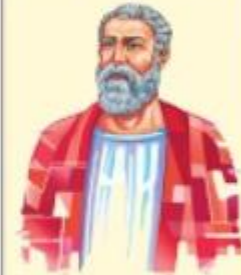
$$A = \sqrt{6,1 \times 1,6 \times 1,4 \times 3,1} = \sqrt{42,3584} \approx 6,5 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área del $\triangle ABC$ es 6,5 cm², aproximadamente.



Historia de las matemáticas

Herón de Alejandría



Fue uno de los grandes matemáticos, científicos e inventores del período helenístico en Grecia (siglos I y II d. C.). Se destacó por el estudio de la mecánica y la elaboración de máquinas novedosas para la época. Dentro de las matemáticas trabajó en técnicas para el cálculo y la medición. En su libro *La Métrica* realizó un estudio sobre el área y el volumen de figuras y cuerpos. A Herón se debe la fórmula para el cálculo del área de triángulos en función de las medidas de sus lados.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Lee y explica con un ejemplo.

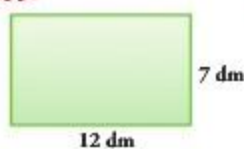
232. Dos estrategias para calcular el área de un triángulo.

233. El área de un cuadrilátero de lados opuestos paralelos.

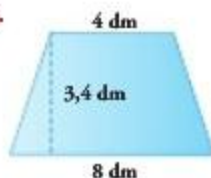
234. El área de un cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

E Halla el área de cada figura.

235.

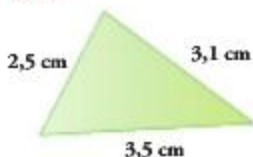


236.

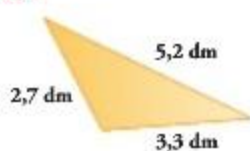


R Aplica la fórmula de Herón para calcular el área de cada triángulo.

237.



238.



R Halla el área de cada figura, a partir de la descripción de sus medidas.

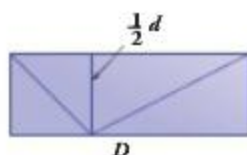
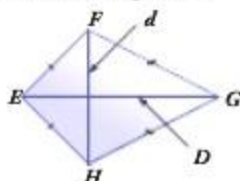
239. Un rectángulo cuyos lados miden 20 cm y 8 cm.

240. Un romboide, si la medida de la base es 30 cm y la medida de su altura es $\frac{2}{5}$ de la base.

241. Un triángulo cuyos lados miden 5,4 cm, 7 cm y 8,5 cm.

242. Un trapecio cuyas bases miden 22,6 dm y 125 cm, y su altura mide 0,88 cm.

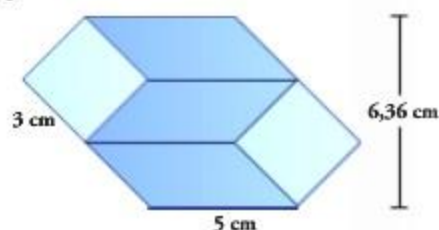
M Observa y responde.



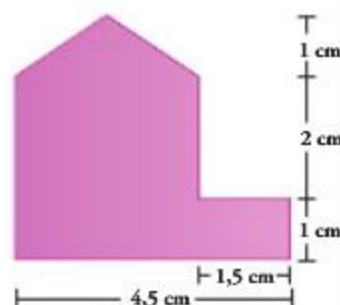
243. ¿Cuál es el nombre del cuadrilátero EFGH?

244. ¿Cuál es la expresión para calcular el área del cuadrilátero EFGH?

245. Determina el área de la superficie del mosaico teniendo en cuenta que los paralelogramos son congruentes.

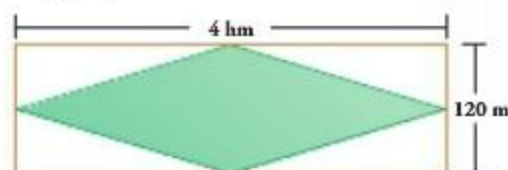


M 246. Determina el área de la siguiente figura.

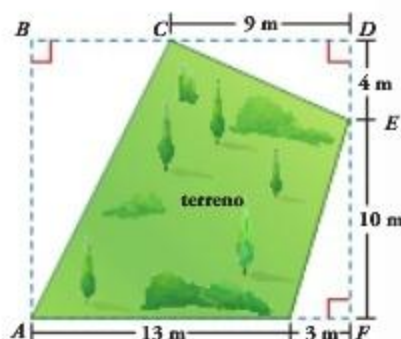


S Lee, observa y resuelve.

247. Se va a comprar un cielo raso como el de la figura. Si el m^2 cuesta \$35.000, ¿cuánto hay que pagar para cubrir el rombo?



248. Para medir el área de un terreno, un perito circunscribe un rectángulo al terreno, conforme se muestra en la figura. ¿Cuál es el área del terreno?





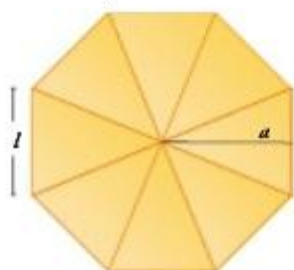
Área de polígonos regulares



Actividad

Para hallar el área de un polígono regular es necesario considerar que todo polígono regular se puede descomponer en tantos triángulos isósceles congruentes, como lados tiene el polígono.

El octágono de la figura se puede descomponer en ocho triángulos isósceles, así:



Cada lado del octágono es, a su vez, la base del triángulo que forma y en cada uno de esos triángulos se puede trazar la altura respectiva.

La medida de la base de cada triángulo corresponde a la medida del lado del polígono (l). Además, la medida de la altura de cada triángulo se denomina **apotema** y se simboliza con la letra a .

Como las bases de los triángulos son iguales al lado l y las alturas son iguales a la apotema a , el área de cada triángulo es:

$$A = \frac{\text{lado} \times \text{apotema}}{2} = \frac{l \times a}{2}$$

Por tanto, el área del polígono se calcula sumando las áreas de los triángulos que lo conforman. Si el polígono tiene n lados, se tiene que:

$$A = \underbrace{\frac{l \times a}{2} + \frac{l \times a}{2} + \frac{l \times a}{2} + \dots + \frac{l \times a}{2}}_{n \text{ veces}}$$

De donde se deduce que:

$$A = \frac{n \times l \times a}{2}, \text{ donde } n \times l \text{ corresponde al perímetro } P \text{ del polígono regular.}$$

El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto de su perímetro por la apotema, es decir:

$$A = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} = \frac{P \times a}{2}$$

Donde P es el perímetro y a es la apotema.

Por ejemplo, para hallar el área de un pentágono regular de 4 cm de lado y 2,75 cm de apotema, se procede así:

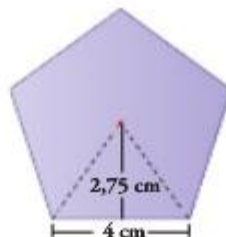
Primero, se calcula el perímetro del pentágono:

$$P = n \times l = 5 \times 4 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$$

Luego, se aplica la expresión para el área:

$$A = \frac{P \times a}{2} = \frac{20 \text{ cm} \times 2,75 \text{ cm}}{2} = \frac{55 \text{ cm}^2}{2} = 27,5$$

Por tanto, el área del pentágono es 27,5 cm².

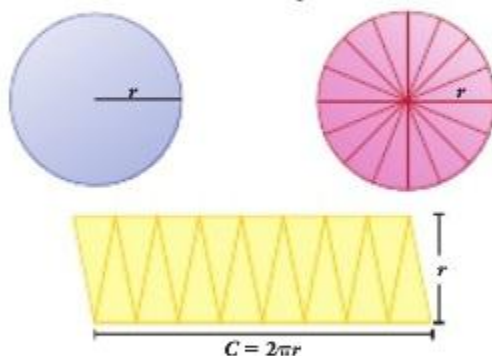




Área del círculo

Para encontrar una expresión que permita hallar el área de un círculo de radio r , se realiza el siguiente procedimiento:

Se divide el círculo en partes iguales, cada vez más pequeñas, así se obtienen sectores más parecidos a triángulos, como se muestra en la figura.



Recuerda que...

La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos que están a igual distancia del centro.

El **círculo** es la superficie que está en el interior de la circunferencia.

Luego, como el área del círculo corresponde a la mitad del área del rectángulo de base $2\pi r$ y altura r , entonces, se tiene que el área del círculo es:

$$A = \frac{2\pi r \times r}{2} = \pi r^2$$

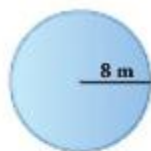
El **área de un círculo** es igual al producto de π por el cuadrado de la medida del radio r .

$$A = \pi r^2$$

EJEMPLOS

1. Calcular el área de cada círculo.

a.



Se aplica la expresión para el área de un círculo con radio 8 m, así:

$$A = \pi r^2 = (3,1416) \cdot 8^2 = (3,1416) \cdot 64 \approx 201,06$$

Por tanto, el área del círculo es 201,06 m².

b.



En este caso se halla primero el radio, así:

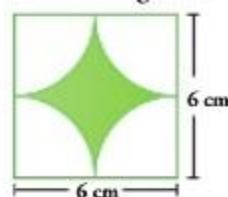
$$r = \frac{d}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

Luego, con $r = 6,5$ se halla el área del círculo como sigue:

$$A = \pi r^2 = (3,1416) \cdot (6,5)^2 \approx 132,73$$

Por tanto, el área del círculo es 132,73 dm².

2. Determinar el área de la región sombreada.



Para hallar el área de la región sombreada se realiza el siguiente procedimiento:

Primero, se halla el área del cuadrado.

$$A_{\square} = l^2 = 6 \times 6 = 36$$

$$A_{\square} = 36 \text{ cm}^2$$

Luego, se halla el área del círculo de radio 3 cm, ya que su diámetro es 6 cm.

$$A_{\circ} = \pi r^2 = (3,1416) \cdot (3)^2 = (3,1416) \cdot 9 \approx 28,27$$

$$A_{\circ} = 28,27 \text{ cm}^2$$

Finalmente, el área de la región sombreada es:

$$A = A_{\square} - A_{\circ} = 36 - 28,27 = 7,73$$

En conclusión, el área de la región sombreada es aproximadamente 7,73 cm².



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **M** Modelo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

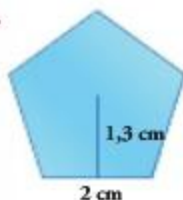
I Explica con un ejemplo:

249. El proceso para calcular el área de un polígono regular.

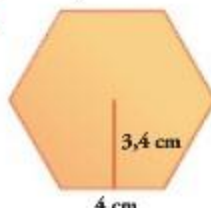
250. El proceso para hallar el área de un círculo.

E Determina el área de cada polígono regular.

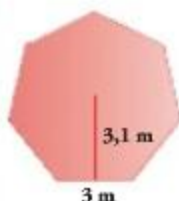
251.



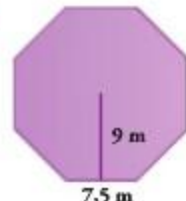
254.



252.



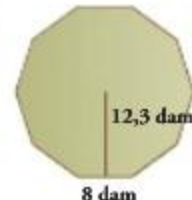
255.



253.

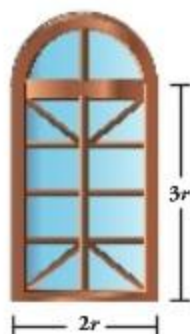


256.



M Lee y resuelve.

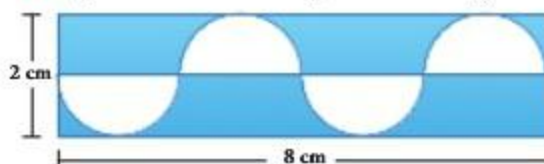
Un tipo de ventana utilizado en construcción es el de modelo Norman (rectángulo con un semicírculo en la parte superior). Una de estas ventanas tiene un semicírculo de radio $r = 60$ cm, como se muestra en la figura.



257. Calcula la cantidad de metros cuadrados de madera que es necesaria para cubrir esta ventana.

I Lee, observa y responde.

258. ¿Cuál es el área de la región azul de la figura?

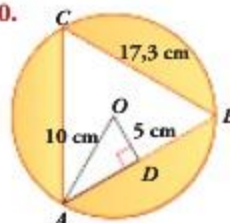


R Halla el área de la región sombreada de cada figura.

259.



260.

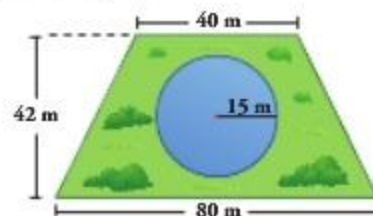


S Lee y resuelve.

261. Un club campestre que tiene forma de hexágono regular está dividido en dos zonas, una para la práctica de deportes y otra de juegos mecánicos, separadas por una ciclovía de 48 m de longitud aproximadamente. Además, el club tiene alrededor un sendero peatonal de 168 m, como se muestra en la figura. Determina el área del club.



262. En el centro de un césped de forma trapezoidal, como se muestra en la figura, se construye una piscina circular de 15 m de radio. Determina el área, en metros cuadrados, correspondiente a la parte del césped.





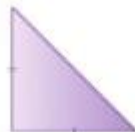
Polígonos

- Clasifica los siguientes triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos.

263.



265.



264.

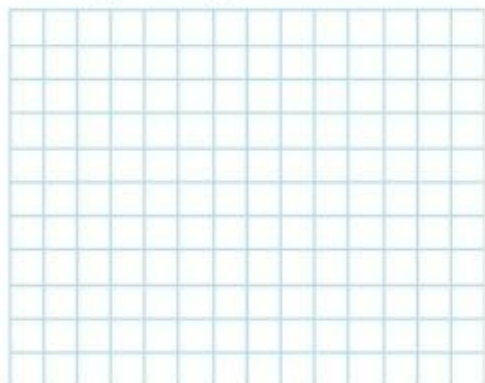


266.

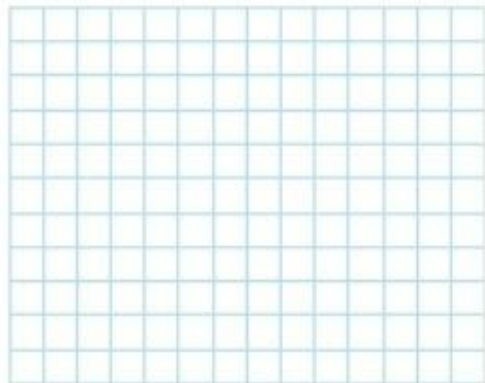


- Construye la figura con las medidas dadas. Si no es posible construirlo, explica las razones.

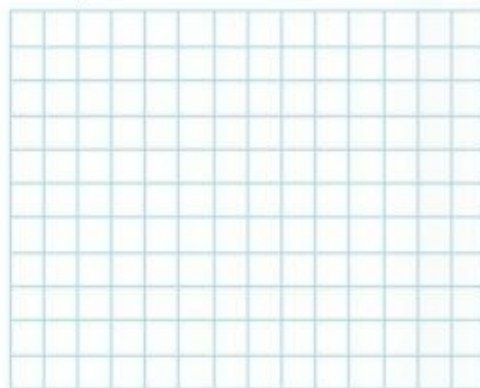
267. $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm



268. Un romboide cuyos lados consecutivos midan 3 cm y 5 cm, respectivamente, y uno de sus ángulos mida 45° .



269. Un trapecio isósceles cuyas bases midan 7,5 cm y 3,5 cm, y su altura sea 4 cm.



Circunferencia y círculo

- Traza en la circunferencia los elementos que se indican.

270. Cuerda $\overline{AB}$

Diámetro $\overline{CD}$

Arco $\widehat{EF}$



Longitud

271. Completa la tabla.

yd	cm	p	m
37			
450			
18			
60			
100			

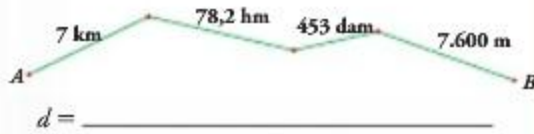
Earl Boykins, con 5,41 pies de altura, es uno de los jugadores de menor estatura que ha jugado en la NBA, mientras que Kenny George con 7,61 pies de altura es uno de los más altos.

272. Expresa en metros la altura de cada jugador.

273. ¿Cuál es la diferencia en centímetros entre tu estatura y la de Kenny George?

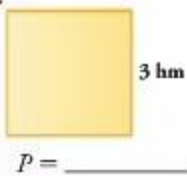
Lee, observa y resuelve.

274. De acuerdo con la gráfica, encuentra la distancia total desde A hasta B .

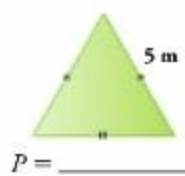


Calcula en metros el perímetro de los siguientes polígonos.

275.



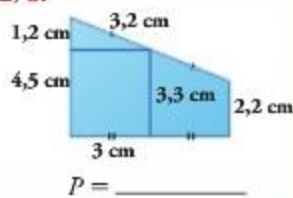
277.



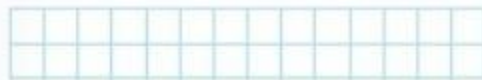
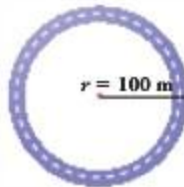
276.



278.



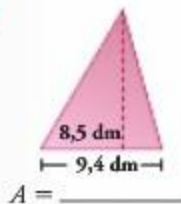
279. Calcula la longitud de una pista de forma circular que tiene 100 m de radio.



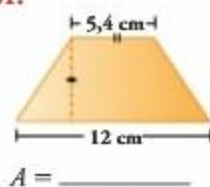
Área

Halla el área de cada polígono.

280.

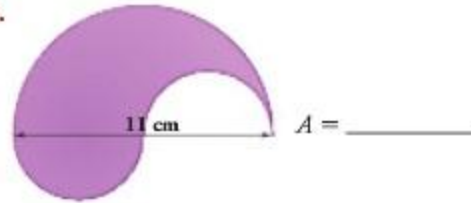


281.

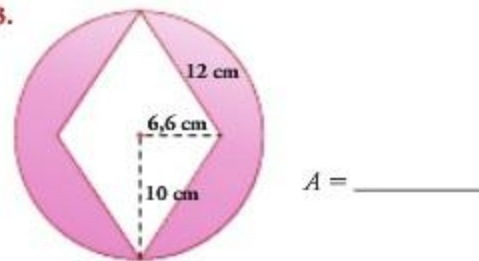


Determina el área de la región sombreada en cada figura.

282.



283.



Lee y resuelve.

284. El perímetro de un rectángulo es 45 cm. Si mide 4,5 cm de ancho, calcula su área.



285. El lado de un heptágono regular mide 5,6 cm y su apotema 5,81 cm. Determina su área.



286. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 10 cm. Calcula su área.



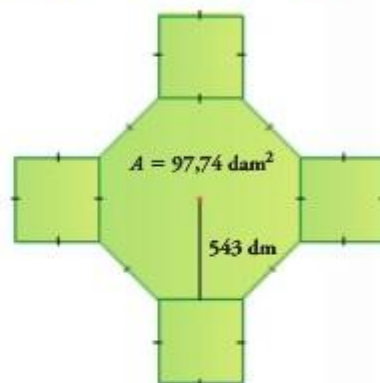
287. El perímetro de un rombo es 60 cm. Si una de sus diagonales mide 12 cm, ¿cuál es su área?



PROBLEMAS PARA REPASAR

El auditorio de una universidad está formado por un salón central octogonal y cuatro alas laterales cuadradas, como se muestra en la figura. La administración de la universidad va a remodelar el auditorio. Para esto, decide cambiar el piso por un material de tráfico pesado, cuyo valor es de \$10.000 el metro cuadrado.

¿Cuál es el costo total del piso del auditorio?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el costo total del piso del auditorio?

¿Cuáles son los datos del problema?

El auditorio está formado por un octágono cuya área es de $97,74 \text{ dm}^2$ y la medida del apotema es 543 dm .

El auditorio cuenta con cuatro cuadrados. El costo del m^2 de piso es \$10.000.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se expresan todas las medidas en metros.

$$97,74 \text{ dm}^2 = 9.774 \text{ m}^2 \quad 543 \text{ dm} = 54,3 \text{ m}$$

Segundo, se calcula la longitud del lado del octágono regular. Para esto, se usan las expresiones para el área y el perímetro de un polígono regular. Así:

$$A = \frac{P \times a}{2} \quad \text{Se aplica la fórmula del área de un polígono regular.}$$

$$9.774 = \frac{P \times 54,3 \text{ m}}{2} \quad \text{Se reemplazan los valores del área (A) y del apotema (a).}$$

$$P = \frac{19.548}{54,3} = 360 \quad \text{Se despeja P.}$$

Ahora, con el valor del perímetro y la cantidad de lados se obtiene el valor del lado.

$$P = n \times l \quad \text{Se aplica la fórmula del perímetro de un polígono regular.}$$

$$360 = 8 \times l \quad \text{Se reemplazan los valores del perímetro y del apotema.}$$

$$l = \frac{360}{8} = 45$$

Luego, la longitud del lado del octágono y el cuadrado es de 45 m .

Luego, se calcula el área de cada superficie cuadrada.

$$A = l^2 = 45^2 = 2.025 \quad \text{Se aplica la fórmula del área de un cuadrado.}$$

Finalmente, se suman las áreas del octágono y el área de los cuatro cuadrados, así se obtiene el área total.

$$\text{Área total} = 9.774 \text{ m}^2 + 4 \times 2.025 \text{ m}^2 = 17.874 \text{ m}^2$$

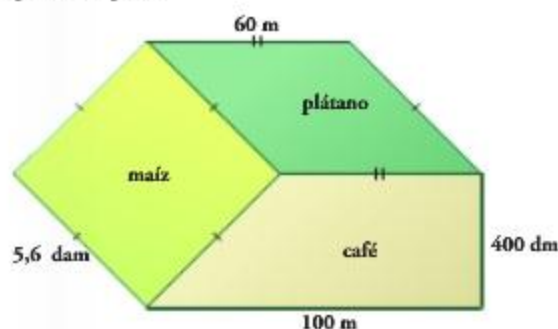
Como el costo por m^2 del piso es \$10.000, entonces, el costo total del piso es:

$$17.874 \times 10.000 = 178.740.000$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones y las expresiones son correctas. Luego, se tiene que el costo total del piso del auditorio de la universidad es de \$178.740.000.

Desde una montaña se observa un terreno dividido en tres lotes con diferentes cultivos, como se muestra en la siguiente figura.



-

-

-
-
-

Se van a pintar las cuatro paredes de una habitación que mide de 6 m de largo por 4,5 m de ancho por 3 m de alto. Cada una de las dos paredes de mayor área tiene una ventana de 2,5 m de ancho y 1,20 m de altura. Mientras que una de las paredes de menor área tiene la puerta de acceso a la habitación y mide 90 cm de ancho y 1,90 m de altura.

...Para conocer las medidas del rin de una rueda de automóvil.



La rueda es un disco circular que se fabricó para girar en torno a su punto central. La invención de la rueda produjo gran evolución y desarrollo para el hombre en diferentes campos, como la ingeniería, la agricultura y el transporte en general.

Las primeras ruedas se construyeron en la antigua Mesopotamia, alrededor del año 3500 a. C., con troncos de madera. Sin embargo, con el paso de los años se fue perfeccionando notablemente, hasta lograr así, en el año 1895, gracias Édouard Michelin, la primera rueda radial con neumáticos de aire.

En la actualidad, tan solo para los automóviles, existe una gran variedad de ruedas de acuerdo con el rin y algunas características especiales de la llanta.

La unidad de medida de los rines es la pulgada y el valor dado por el fabricante corresponde al diámetro de la circunferencia.

Por ejemplo, en la figura se observa un rin 14 que hace referencia a la medida de su diámetro que es de 14 pulgadas.

El valor del diámetro medido en pulgadas se puede expresar en centímetros multiplicando la cantidad dada por 2,54, que es la equivalencia de una pulgada. Así:

$$14 \times 2,54 = 35,56 \text{ cm}$$

Luego, la medida del radio se obtiene al dividir entre 2 el valor del diámetro.

$$35,56 \div 2 = 17,78 \text{ cm}$$

Por tanto, un rin 14 tiene 17,78 cm de radio.

1. ¿Por qué es necesario conocer la medida del rin para comprar una llanta?
2. Dibuja los elementos de una circunferencia sobre la siguiente rueda de rin 20.



3. Completa la siguiente tabla.

Imagen	Rin (pul)	Diámetro (cm)	Radio (cm)
	15		
		33,28	
			21,59

4. En los bordes de las llantas se observan diferentes números que indican sus características. Consulta qué medidas indica cada uno de los números encontrados y explica la información a tus compañeros.

...También sirve para diseñar edificaciones a partir de polígonos y circunferencias.

En arquitectura y en ingeniería constantemente aplican formas geométricas simétricas y regulares en la construcción de ambientes laborales, escenarios deportivos y culturales.

En la actualidad es tan importante el diseño como la funcionalidad, por eso se utilizan las diferentes figuras geométricas para generar espacios amplios y atractivos para toda la comunidad. Un ejemplo de estos diseños es el estadio Allianz Arena, ubicado en Múnich, Alemania.



El estadio presenta las siguientes dimensiones:

- Área del gramado: $105\text{ m} \times 69\text{ m}$.
- El complejo deportivo tiene una longitud de 258 m, una anchura de 227 m y una altura de 50 m de alto.

La parte externa del estadio está formada con 2.874 paneles romboidales metálicos, que cubren una superficie de 66.500 m^2 . Cada panel presenta una iluminación propia con los colores blanco, azul y rojo. Lo anterior

tiene como objetivo utilizar los colores de los equipos de fútbol que se enfrentan en cada jornada.

Para la construcción del estadio, se necesitaron aproximadamente 102.000 m^3 de hormigón y 22.000 toneladas de acero. Además, para la zona de los parqueaderos se usaron 85.000 m^3 de hormigón y 14.000 toneladas de acero.

1. Explica las dimensiones del estadio Allianz Arena, señalando las medidas relacionadas con la longitud y el área.
2. ¿Cuál es la forma de los paneles del estadio y por qué tienen esa forma?
3. El Parque Metropolitano Simón Bolívar está ubicado en la ciudad de Bogotá en un espacio cuadrado, aproximadamente, como se muestra en la figura.



Si ocupa un espacio total de 113 hectáreas, ¿qué longitud tiene cada uno de los lados del parque? ¿Cuál es su perímetro?

4. La Ciudadela Colsubsidio es un proyecto urbanístico ubicado en Bogotá con miras a construir una ciudad dentro de la ciudad. Su imagen aérea forma una circunferencia de 1,1 km de diámetro, aproximadamente, como se muestra en la imagen.



- ¿Cuál es el perímetro de la ciudadela medido en metros?

Trabaja con GeoGebra

Objetivo: calcular el área y el perímetro de polígonos a partir de la variación de los parámetros de sus lados.

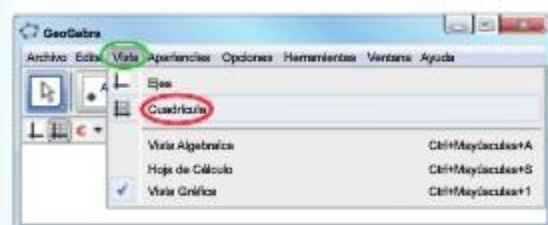
Descripción: calcular gráfica y analíticamente el área y el perímetro de un polígono en el programa GeoGebra, reconociendo los elementos de los polígonos como también la diferencia entre área y perímetro. Luego, hacer variar los parámetros de los lados por cualquier número real para encontrar generalidades y aplicaciones de los conceptos de área y perímetro de figuras geométricas planas.

Para acceder a GeoGebra, ingresa y descarga el programa en: www.geogebra.org/cms/es

- 1 Haz clic en GeoGebra.
- 2 Visualiza la ventana de trabajo con sus diversas herramientas, como se muestra en la siguiente figura.



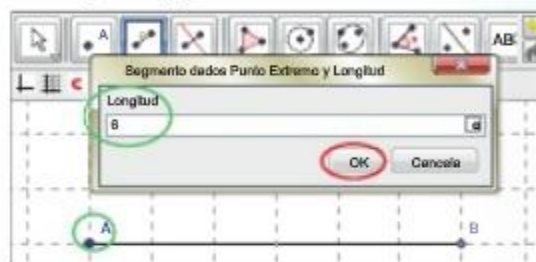
- 3 Selecciona en el menú Vista. Luego, en la ventana que se despliega, haz clic en Ejes y en la opción Cuadrícula, como se muestra en la figura.



- 4 Para construir un segmento, haz clic en el botón Segmento dados Punto Extremo y Longitud.



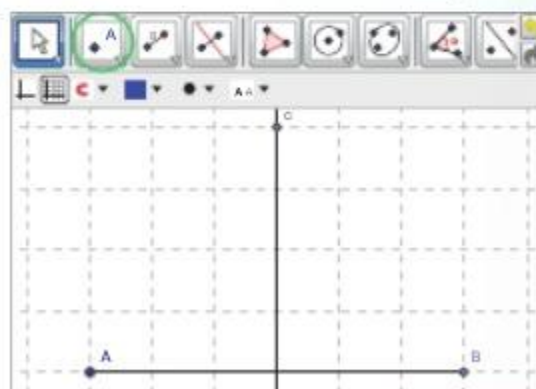
- 5 Haz clic en la parte inferior en el área de trabajo para establecer el punto A. Luego, escribe la longitud 6 y por último, haz clic en OK.



- 6 Traza la mediatriz del segmento AB con la herramienta Mediatriz. Luego, haz clic sobre el segmento, como se muestra en la figura.



- 7 Ubica el punto C sobre la mediatriz del segmento a cuatro cuadrículas del segmento AB hacia arriba, como se muestra en la figura.



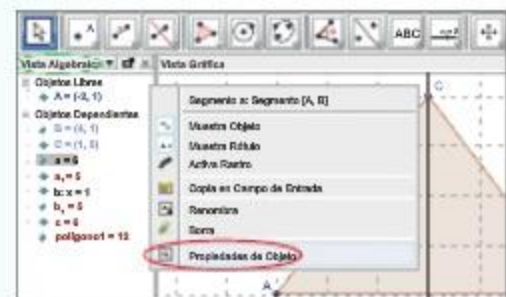
- 8 Traza el triángulo de vértices A , B y C , seleccionando la herramienta **Polígono**. Luego, haz clic sobre cada vértice, como se muestra en la imagen.



- 9 Selecciona en el menú **Elige y Mueve**.



- 10 Observa la ventana **Vista Algebraica** ubicada en la parte izquierda. Luego, haz clic derecho sobre $a = 6$, por último, en la ventana que se despliega haz clic en **Propiedades de objeto**.

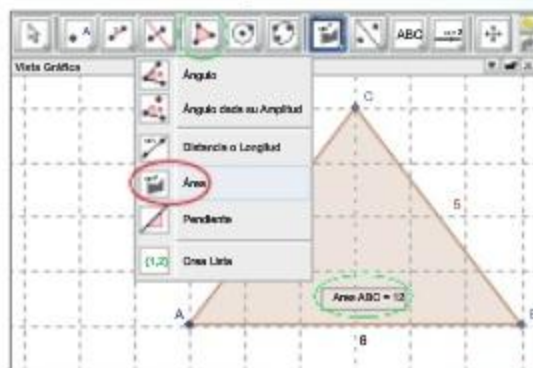


- 11 Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la **Muestra Rótulo**. Después, haz clic en la opción **Valor** y cierra la ventana.



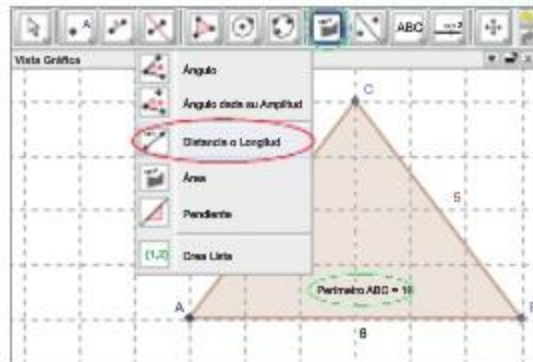
- 12 Repite los puntos 8 y 9 para los valores a_1 y b_1 .

- 13 Selecciona la herramienta **Área** en el menú. Luego, haz clic dentro de la figura para calcular el área del triángulo y conocer su valor, como se muestra en la figura.

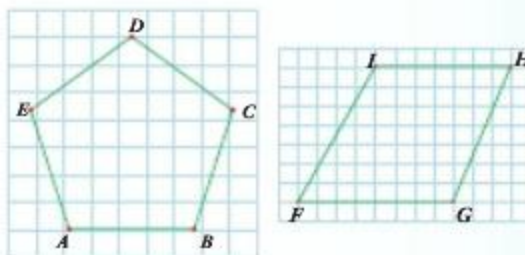


- 14 Explica por qué el área del triángulo es 12 unidades cuadradas.

- 15 Selecciona la herramienta **Distancia o Longitud** en el menú. Luego, haz clic dentro de la figura para calcular el perímetro del triángulo y conocer su valor, como se muestra en la figura.



- 16 Construye los siguientes polígonos. Luego, calcula el perímetro y el área de cada uno.



6

Cuerpos geométricos

Estándares: pensamientos espacial y métrico

→ Tu plan de trabajo...

- Realizar conversiones entre las unidades de medida de volumen.
- Identificar las principales características de los poliedros y de los cuerpos redondos.
- Calcular el volumen de diferentes poliedros y cuerpos redondos.
- Hallar la capacidad de un recipiente y expresarla en diferentes unidades de medida.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

- ✓ De desempeño ✓ Por competencias

 **5** Multimedia

 **1** Audio

 **1** Galería

 **3** Imprimibles

 **6** Actividades

 **3** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Determina cuántos cubos hay en la siguiente figura.

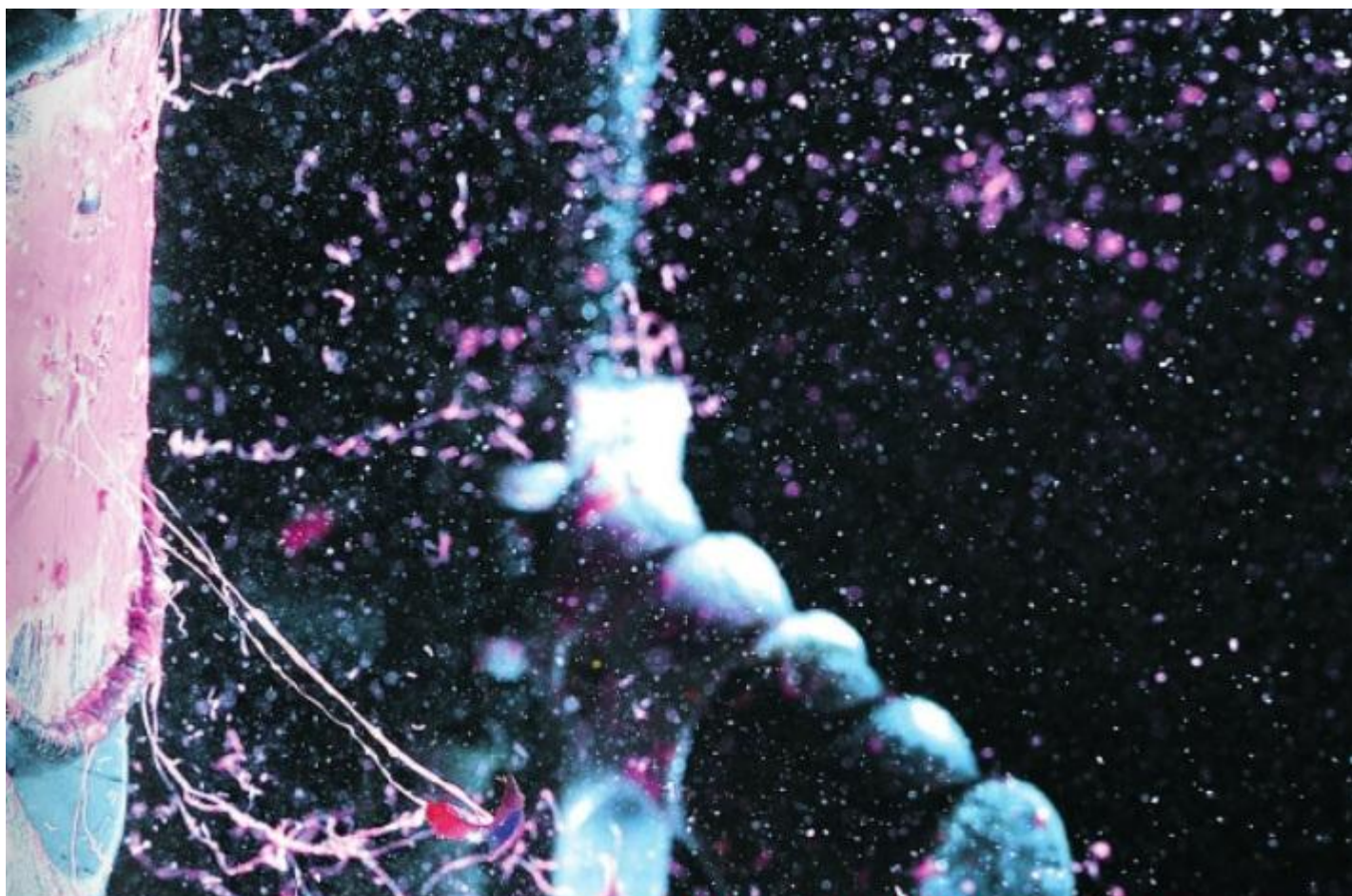


2. Convierte las siguientes medidas a metros.

a. 5 hm b. 300 dm c. 420 mm

3. Calcula el área de los siguientes polígonos regulares.





Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para conocer las dimensiones de los obstáculos utilizados en *paintball*.

El *paintball* es un deporte donde se enfrentan, generalmente, dos equipos con pistolas de gas comprimido que disparan pelotas de pintura. Su objetivo es tomar la bandera del otro equipo o eliminar a todos los jugadores del equipo contrario.

■ Lee más acerca de este tema en la página 242.

Cronología de los cuerpos geométricos

Grecia. Se planteó el problema de construir un cubo con el doble de volumen de un cubo inicial utilizando únicamente regla y compás.

Grecia. Platón en su *Diálogo* sobre la naturaleza expone la relación entre los poliedros regulares y los cuatro elementos primarios: aire, tierra, fuego y agua.

Grecia. Euclides en su libro XI de los *Elementos* definió la esfera como un sólido de revolución generado al hacer girar un semicírculo en torno a su diámetro.



Suiza. Leonhard Euler publicó el teorema de los poliedros mediante el cual relaciona el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo.



Francia. Pierre Wantzel demostró que el problema de duplicar el cubo no tiene solución.

Dinamarca. Piet Hein inventó el cubo soma, que es un rompecabezas geométrico formado por cubos.





Historia de las matemáticas

Medidas de volumen en la antigua Grecia



Los griegos utilizaron unidades de medida de volumen que se denominaban "secas" para medir la cantidad de grano almacenado en un recipiente. Una unidad de medida que fue bastante utilizada se llamaba *cotyla* y equivalía aproximadamente a 0,274 dm³.

1. Volumen



Recurso imprimible



Actividad

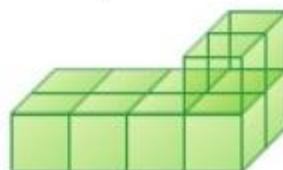
El **volumen** es la medida del espacio que ocupa un cuerpo. Para medir el volumen se utilizan unidades cúbicas.

Por ejemplo, para medir el volumen del siguiente cuerpo se cuentan las unidades cúbicas que lo conforman.

Unidad cúbica

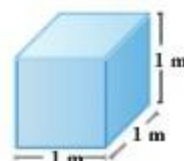


1 u³



Volumen: 10 u³

La unidad básica para medir el volumen de un cuerpo en el SMD es el **metro cúbico**, que se simboliza como **m³**. El metro cúbico corresponde al volumen de un cubo cuya arista tiene un metro de longitud.



Los múltiplos del metro cúbico son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia
Miriámetro cúbico	mm ³	1.000.000.000.000 m ³
Kilómetro cúbico	km ³	1.000.000.000 m ³
Hectómetro cúbico	hm ³	1.000.000 m ³
Decámetro cúbico	dam ³	1.000 m ³

Los submúltiplos del metro cúbico son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia
decímetro cúbico	dm ³	0,001 m ³
centímetro cúbico	cm ³	0,000001 m ³
milímetro cúbico	mm ³	0,000000001 m ³

Para hacer conversiones entre estas unidades de medida de volumen se debe tener en cuenta que cada unidad es 1.000 veces mayor que la inmediatamente inferior y 1.000 veces menor que la inmediatamente superior.

Por tanto, para convertir de una unidad de medida de orden superior a una de orden inferior, se multiplica cada vez por 1.000 y, para convertir de una unidad de orden inferior a una de orden superior, se divide entre 1.000.

EJEMPLO

El volumen de una bola de billar es aproximadamente 974.347 mm³. ¿Cuál es el volumen de la bola de billar en centímetros cúbicos?

Como mm³ es una unidad de medida inmediatamente inferior a cm³, entonces, se divide entre 1.000 para realizar la conversión. Por tanto, el volumen de la bola de billar es de 974,347 cm³.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Completa los siguientes enunciados.

1. Para convertir de m^3 a cm^3 se multiplica por _____.
2. Para convertir de mm^3 a dm^3 se divide entre _____.
3. Para convertir de cm^3 a dm^3 se _____ entre 1.000.

E Realiza las siguientes conversiones.

4. $3,5 \text{ dam}^3$ a m^3
5. 56 hm^3 a dm^3
6. $4,56 \text{ km}^3$ a dam^3
7. $89,45 \text{ hm}^3$ a mm^3
8. $0,0001 \text{ hm}^3$ a km^3
9. $8,05 \text{ hm}^3$ a dm^3
10. $1,56 \text{ hm}^3$ a m^3
11. $0,234 \text{ km}^3$ a cm^3
12. $245,6 \text{ cm}^3$ a dm^3
13. 856 hm^3 a m^3

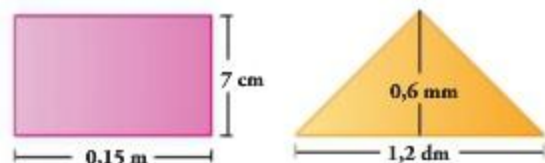
R Ordena las siguientes medidas de menor a mayor.

14. $45,8 \text{ dam}^3$; 458 m^3 ; $4,58 \text{ hm}^3$; $45.800.000.000 \text{ mm}^3$.
15. 659 dm^3 ; $65,9 \text{ m}^3$; $0,659 \text{ hm}^3$; $659.000.000 \text{ cm}^3$.
16. $853,2 \text{ m}^3$; $8,532 \text{ km}^3$; $0,8532 \text{ dam}^3$; 853.200 dm^3 .
17. $695,4 \text{ m}^3$; $69,54 \text{ km}^3$; $695,4 \text{ dam}^3$; 69.540 dm^3 .
18. 56.700 m^3 ; $5,67 \text{ hm}^3$; $0,567 \text{ km}^3$; 56.700 dm^3 .

I Determina cuáles de las siguientes equivalencias son correctas y cuáles no. Justifica tu respuesta.

19. 54 cm^3 equivalen a 54.000 mm^3 .
20. 28 km^3 equivalen a 28.000 dam^3 .
21. $0,05 \text{ hm}^3$ equivalen a 50.000 km^3 .
22. 7.000 mm^3 equivalen a $0,007 \text{ dm}^3$.
23. 9 dm^3 equivalen a $0,09 \text{ dam}^3$.
24. $14.000.000 \text{ mm}^3$ equivalen a 14 dm^3 .

P 25. Observa las dimensiones de las siguientes figuras. Luego, escribe dos preguntas relacionadas con la medida del área y resuélvelas.



R Responde.

26. El volumen de un ladrillo es de 1.200 cm^3 . Si se construyó una pared con 130 ladrillos de estos, ¿cuál es el volumen de la pared en m^3 ?
27. Si una caja tiene un volumen de 5.000 cm^3 , ¿cuál es la mayor cantidad de cajas iguales que puede almacenar un contenedor de 60 m^3 ?
28. La siguiente tabla muestra el consumo de agua de los últimos cinco meses de la familia Acosta. Completa la columna con el cobro correspondiente, si se sabe que se tiene un cargo fijo mensual de \$13.842 y se cobran \$2.350 por cada $1.000.000 \text{ cm}^3$.

Mes	Consumo (m^3)	Cobro acueducto (\$)
Mayo - junio	23	
Julio - agosto	14	
Agosto - octubre	21	
Octubre - diciembre	22	
Diciembre - febrero	19	

29. Para construir seis muros exteriores en una biblioteca se utilizaron bloques de 95 cm de largo, 80 cm de ancho y $1,8 \text{ m}$ de altura. Además, cada bloque tiene un costo de \$50.000 por metro cúbico.
30. Calcula el volumen de cada bloque en metros cúbicos.
31. Si el volumen de uno de los muros es aproximadamente 38.304 dm^3 , ¿cuántos bloques se necesitaron para construirlo?
32. Determina la cantidad de bloques necesarios para construir los seis muros.
33. Calcula el costo total de los bloques necesarios para los seis muros.
34. Se construyó un estanque de 450.000 dm^3 para el cultivo de tilapia.

Si el espacio óptimo para el cultivo de tilapia debe ser de 2 tilapias por cada metro cúbico, ¿cuántas tilapias se deben poner en el estanque?





2. Poliedros



Ampliación multimedia



Actividad

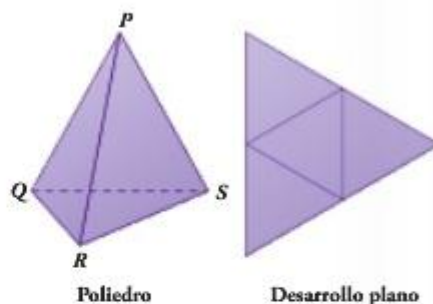


Enlace web

Un **poliedro** es un sólido limitado por superficies planas llamadas caras.

Los elementos de un poliedro son:

- **Caras:** son los polígonos que limitan el poliedro. En el poliedro que se muestra, las caras son PQR , PRS , PQS y QRS .
- **Aristas:** son los lados que conforman cada cara. Así, PQ , PR , PS , QS , QR y RS son las aristas del poliedro.
- **Vértices:** son los puntos donde concurren varias aristas. Los vértices del poliedro son P , Q , R y S .



El desarrollo plano de un poliedro es el conjunto de polígonos tales que al unirlos por las aristas forman el poliedro.

2.1 Paralelepípedo

Un **paralelepípedo** es un poliedro formado por seis caras que son paralelogramos, de tal forma que las caras opuestas son paralelas y congruentes.

Un paralelepípedo cuyas caras son rectángulos se denomina **paralelepípedo rectangular** y uno cuyas caras son cuadrados, se denomina **cubo**.



Paralelepípedo rectangular



Cubo

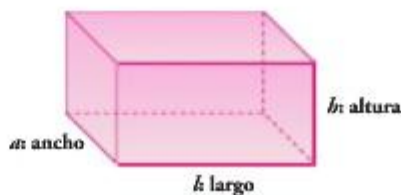
El volumen V de un paralelepípedo está dado por la expresión:

$$V = l \times a \times h$$

Donde l es la medida del largo, a es la medida del ancho y h es la altura del paralelepípedo.

Teniendo en cuenta las mismas variables, se puede calcular el área total A_T de la superficie del paralelepípedo mediante la siguiente expresión.

$$A_T = 2al + 2lh + 2ab$$





Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

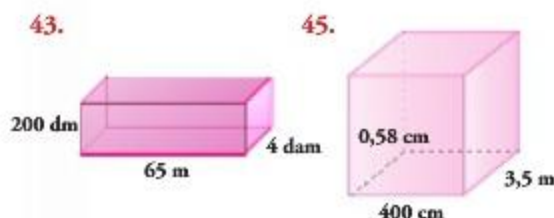
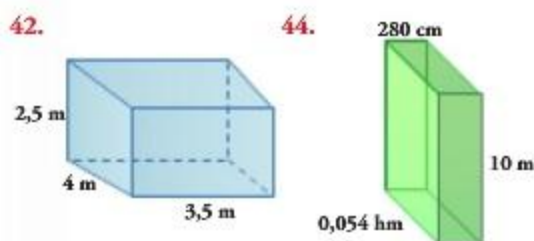
R Responde.

34. ¿Qué es un poliedro?
35. ¿Qué condiciones debe cumplir un poliedro para que sea paralelepípedo?
36. Si en un paralelepípedo el largo, el ancho y la altura tienen la misma medida m , ¿cuál es su volumen?
37. Si las medidas del largo, el ancho y la altura de un paralelepípedo son p , q y r , respectivamente, ¿cuál es el área total de su superficie?

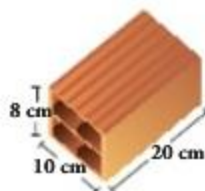
D Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

38. Existen paralelepípedos que no son poliedros.
39. Todo cubo es un paralelepípedo.
40. Si en un paralelepípedo todas sus caras son rectángulos, entonces, es un paralelepípedo rectangular.
41. Si un paralelepípedo tiene cuatro aristas de igual medida, entonces, es un cubo.

E Calcula el volumen de los siguientes paralelepípedos en metros cúbicos.



O 46. Observa las dimensiones del siguiente ladrillo. Luego, escribe dos preguntas relacionadas con el volumen de un paralelepípedo y resuélvelas.

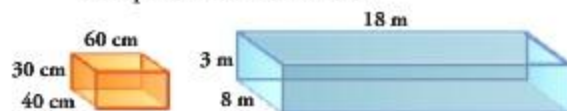


S Cierta tipo de cereal viene en cajas cuyas dimensiones se muestran a continuación.

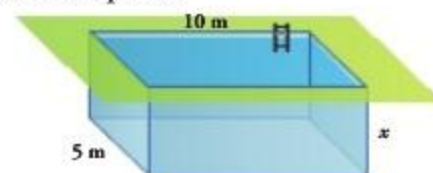


47. Determina cuál es la presentación que resulta más económica por centímetro cúbico.
48. Halla la cantidad de centímetros cuadrados que se necesitan para la fabricación de cada caja.

S 49. La figura muestra las dimensiones de un contenedor y de las cajas que se van a almacenar en él. Determina la cantidad de cajas que se pueden almacenar en el contenedor de tal forma que este quede totalmente lleno.



S 50. Supón que la piscina que se muestra en la figura tiene forma de paralelepípedo. Si el volumen de la piscina es de 125.000 dm^3 , ¿cuál es la profundidad de la piscina?



S 51. Un cajón se fabrica con listones de madera de 0,5 cm de grosor. Si las medidas de la parte externa del cajón se muestran en la siguiente figura, ¿cuál es el volumen interno del cajón?





2.2 Prisma



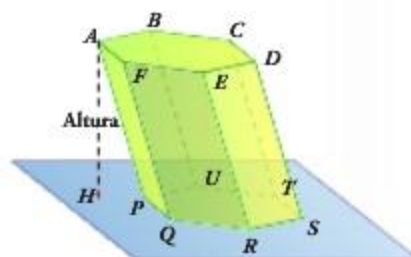
Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos, llamados **bases**, y varios paralelogramos llamados **caras laterales**.

Matemáticamente

¿Todo paralelepípedo es un prisma? Justifica tu respuesta.

Por ejemplo, en el prisma que se muestra, las bases son los hexágonos $ABCDEF$ y $PUTSRQ$. Además, las caras laterales son los paralelogramos $ABUP$, $BCTU$, $CDST$, $DESR$, $EFQR$ y $FAPQ$.

La **altura** del prisma es el segmento perpendicular al plano que contiene una de las bases y que tiene como punto extremo uno de los vértices de la otra base. En el prisma que se muestra la altura es AH .



Los prismas se clasifican según la forma de sus caras laterales en prismas rectos y prismas oblicuos.

Prisma recto: sus caras laterales son perpendiculares a las bases y tienen forma rectangular.

Prisma oblicuo: sus caras laterales no son perpendiculares a las bases y tienen forma de romboide.

Además, los prismas se clasifican según la forma de sus bases en triangular, pentagonal, hexagonal, entre otros.

En un prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.

- El **área lateral** (A_L) es la suma de las áreas de las caras laterales. En un prisma recto, el área lateral se calcula multiplicando la altura h por el perímetro de la base P_B .

$$A_L = hP_B$$

- El **área total** (A_T) es la suma del área lateral más la suma de las áreas de las bases en el caso del prisma recto.

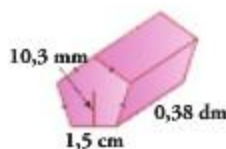
$$A_T = hP_B + 2A_B$$

- El **volumen** (V) es igual al producto del área de la base por la altura.

$$V = A_B h$$

EJEMPLO

Una pieza de acero tiene forma de prisma pentagonal como se indica en la figura. Determinar cuántos centímetros cúbicos de acero se requieren para elaborar 1.000 piezas iguales.



Primero, se expresan todas las medidas en la misma unidad. Por tanto, se tiene que:

- 10,3 mm equivalen a 1,03 cm
- 1,5 cm equivalen a 1,5 cm
- 0,38 dm equivalen a 3,8 cm

Segundo, se calcula el área de la base del prisma (A_B). Para esto, se divide entre 2 el producto del perímetro de la base por la medida del apotema (a).

$$A_B = \frac{a \times P_B}{2} = \frac{1,03 \times 7,5}{2} = 3,8625 \text{ cm}^2$$

Luego, se multiplica el área de la base por la altura, para calcular el volumen (V).

$$V = 3,8625 \times 3,8 = 14,6775$$

Finalmente, se multiplica el volumen por 1.000, de donde se concluye que se necesitan 14.677,5 cm³ de acero para elaborar las 1.000 piezas.

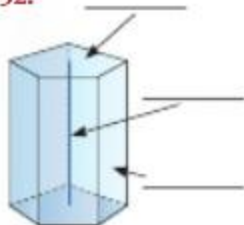


Afianzo COMPETENCIAS

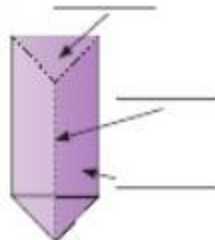
I Interpreto • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

I Escribe los elementos del prisma en cada figura.

52.



53.



E Completa las siguientes expresiones relacionadas con las medidas de un prisma. Ten en cuenta que A_B es el área de la base, A_L es el área lateral, A_T es el área total, h es la altura y V el volumen.

54. $A_L + \underline{\hspace{2cm}} = A_T$ 56. $A_T - \underline{\hspace{2cm}} = A_L$

55. $\underline{\hspace{2cm}} \times h = V$ 57. $V \div A_B = \underline{\hspace{2cm}}$

E Calcula el área total de los prismas con base regular, de acuerdo con las condiciones dadas.

58. Base triangular de lado 5 cm

Altura del triángulo: 4,3 cm

Altura del prisma: 8,5 cm

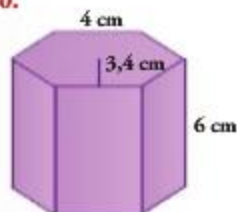
59. Base pentagonal de lado 4 cm

Apotema del pentágono: 0,27 dm

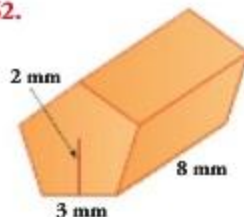
Altura del prisma: 0,12 m

E Halla el volumen de los siguientes prismas teniendo en cuenta que sus bases son polígonos regulares.

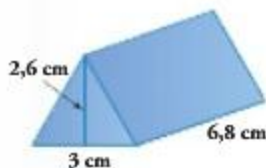
60.



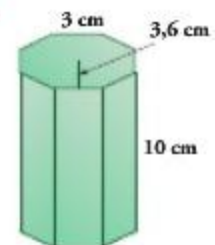
62.



61.



63.

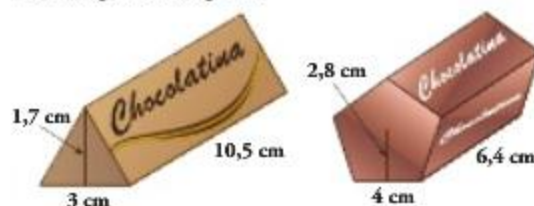


S 64. Un empaque para un perfume tiene forma de prisma hexagonal. Determina la altura del empaque de acuerdo con las medidas indicadas en la figura.



Volumen: $780,3 \text{ cm}^3$

S Dos empaques de chocolatinas vienen en dos presentaciones: una en forma de prisma pentagonal y la otra en forma de prisma triangular, como se muestra en las siguientes figuras.

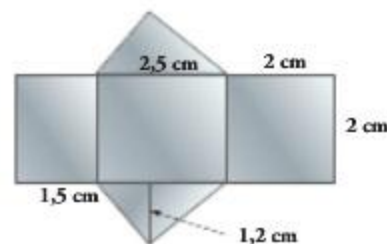


65. Determina cuál es el empaque que tiene mayor volumen, teniendo en cuenta que las bases son polígonos regulares.

S 66. Una fábrica de accesorios diseñó portalápices utilizando tres prismas hexagonales como se muestra en la figura. Si se sabe que el volumen de los tres prismas es de 960 cm^3 y el área de la base de cada prisma es 64 cm^2 , determina la altura del portalápices.



S Se quiere fabricar 50 recipientes en aluminio con láminas como las que se muestran a continuación.



67. ¿Cuál es el volumen de cada recipiente?



2.3 Pirámides

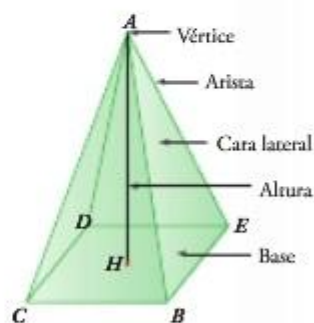


Actividad

Una **pirámide** es un poliedro formado por una base y varias caras laterales. La base es un polígono y las caras laterales son triángulos que concurren en un vértice común.

Los elementos de una pirámide se muestran en la figura, entre estos elementos se tienen:

- **Caras laterales:** son los triángulos que concurren en el vértice de la pirámide. En este caso, las caras laterales son $\triangle AED$, $\triangle ADC$, $\triangle ACB$ y $\triangle ABE$.
- **Base:** es el polígono de la pirámide que no contiene al vértice. En este caso, la base de la pirámide es el cuadrilátero $BCDE$.
- **Altura:** es el segmento perpendicular al plano que contiene a la base que tiene como uno de sus puntos extremos el vértice de la pirámide.



La clasificación de las pirámides es similar a la de los prismas. Es decir, de acuerdo con su base, las pirámides pueden ser triangulares, pentagonales, hexagonales y así sucesivamente. Además, si las bases son polígonos regulares se dice que la pirámide es **regular**; si no cumple esta condición se dice que es una pirámide **irregular**. Por otra parte, las pirámides también pueden ser **rectas** y **oblicuas**.

En una pirámide regular se puede calcular el área lateral (A_L), el área total (A_T) y el volumen (V) mediante las siguientes expresiones:

$A_L = nA$, donde n es el número de lados de la base y A el área de una de las caras laterales.

$A_T = A_B + A_L$, donde A_B es el área de la base.

$V = \frac{1}{3} (A_B \times h)$, donde h es la altura de la pirámide.

Ampliación multimedia



EJEMPLO

La pirámide de Kefrén o la Gran Pirámide es una pirámide de base cuadrada ubicada en El Cairo (Egipto), que data del siglo XXVI a. C. Según las medidas que aparecen en la fotografía, ¿cuál es el área lateral de la pirámide de Kefrén?



Primero, se calcula el área A de cada cara lateral. Como cada cara lateral es un triángulo, entonces, su área es igual a la mitad del producto de la medida de la arista de la base por la altura de la cara.

Luego, se tiene que $A = \frac{179,36 \times 143,49}{2} \approx 12.868,18$.

Finalmente, se multiplica por 4, que es el número de lados de la base, para hallar el área lateral.

$$\begin{aligned} A_L &= 4 \times 12.868,18 \\ &= 51.472,72 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área lateral de la pirámide de Kefrén es aproximadamente $51.472,72 \text{ m}^2$.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

I Responde.

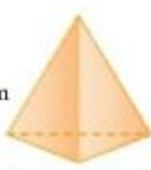
68. Si un prisma y una pirámide tienen como base un hexágono regular, ¿puede el prisma tener más caras laterales que la pirámide? Justifica tu respuesta.

69. Si la base de una pirámide es un cuadrilátero, ¿cuántas aristas tiene la pirámide?

E Calcula el volumen de cada pirámide si se sabe que las bases son polígonos regulares.

70.

$$h = 4 \text{ cm}$$



Área de la base: $2,5 \text{ cm}^2$

72.

$$h = 6,5 \text{ cm}$$



Lado de la base: $3,2 \text{ cm}$

71.

$$h = 8,5 \text{ cm}$$



Área de la base: 12 cm^2

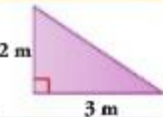
73.

$$h = 10 \text{ cm}$$



Lado del hexágono: 6 cm .
Apotema del hexágono: $5,2 \text{ cm}$

S 74. Determina el volumen de las siguientes pirámides de acuerdo con los datos de la tabla. Explica el procedimiento que utilizas en cada caso.

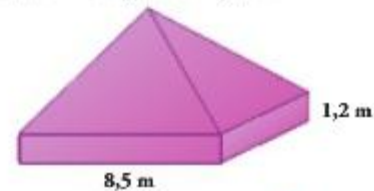
Forma de la base	Altura de la pirámide (m)	Volumen (m^3)
	4,5 m	
	12,5 m	
	15 m	
	8,5 m	

S 75. En la parte exterior del Museo del Louvre se puede observar una pirámide de base cuadrada con 140 m de perímetro. Determina el área lateral de la pirámide si se sabe que la altura de una de sus caras laterales es de $72,97 \text{ m}$.

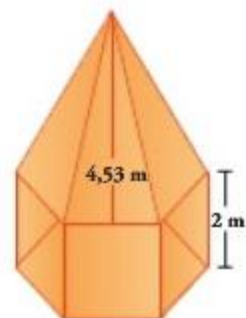


P 76. Escribe las medidas correspondientes a una pirámide y a un prisma que tienen la misma base y la misma altura. Luego, compara sus volúmenes y sus áreas laterales.

S 77. La arquitectura japonesa incorpora cuerpos geométricos para buscar soluciones de vivienda. Una de las más conocidas es la casa pirámide negra, que está formada por un paralelepípedo y una pirámide de base cuadrada. Si el volumen de una casa pirámide negra es de $231,2 \text{ m}^3$, ¿cuál es su altura total teniendo en cuenta las medidas mostradas en la siguiente figura?



S La cúpula de una iglesia está formada por un prisma hexagonal recto y una pirámide recta, como se muestra en la figura. La distancia del centro de la base del prisma a cada uno de sus lados es de $3,4 \text{ m}$ y su perímetro es de 24 m .



78. Calcula el área lateral de la cúpula.

79. Si el volumen total de la cúpula es de $122,4 \text{ m}^3$ y el volumen del prisma es de $81,6 \text{ m}^3$, calcula la altura de la pirámide que conforma la cúpula.



2.4 Poliedros regulares



Actividad



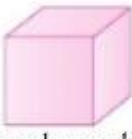
Enlace web

Matemáticamente

Consulta cómo se calcula el área total y el volumen del dodecaedro y del icosaedro regular.

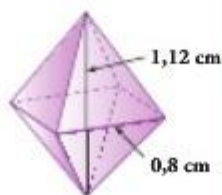
Los **poliedros regulares** son aquellos cuyas caras son polígonos regulares y congruentes.

Los cinco poliedros regulares y sus características se muestran en la siguiente tabla.

Poliedro regular	Polígono de sus caras	Número de caras que concurren en un vértice	Número de caras en total
 Tetraedro regular	 Triángulo equilátero	3	4
 Hexaedro regular	 Cuadrado	3	6
 Octaedro regular	 Triángulo equilátero	4	8
 Dodecaedro regular	 Pentágono regular	3	12
 Icosaedro regular	 Triángulo equilátero	5	20

EJEMPLO

Un diamante tiene forma de octaedro regular, con las medidas que se indican en la figura. Determinar el costo del diamante si se sabe que cada cm^3 de diamante de esta calidad tiene un valor de \$12.000.000.



Primero, el octaedro está formado por dos pirámides de base cuadrada. Así, la altura de cada pirámide es:

$1,12 \div 2 = 0,56 \text{ cm}$ y el lado de su base es $0,8 \text{ cm}$.

Luego, se calcula el volumen del octaedro multiplicando por 2 el volumen de una de las pirámides y teniendo en cuenta que el área de la base A_b es $0,64 \text{ cm}^2$ y la altura h es $0,56 \text{ cm}$.

$$V = 2 \times \left(\frac{1}{3} A_b h \right) \\ = 2 \times \left(\frac{1}{3} (0,64) (0,56) \right) \approx 0,239$$

Finalmente, se multiplica el volumen del octaedro por 12.000.000. Por tanto, el costo del diamante en pesos es: $0,239 \times 12.000.000 = 2.868.000$



Afianzo COMPETENCIAS

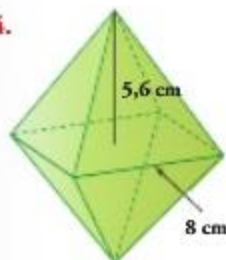
I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

I Completa cada enunciado.

80. Un octaedro regular se puede formar a partir de dos _____ de base _____.
81. Un hexaedro regular es un _____ porque todas sus aristas tienen _____ medida.
82. Un dodecaedro regular tiene _____ caras y cada una de ellas es un _____ regular.
83. Las caras de un icosaedro regular son triángulos _____.

E Calcula el volumen de cada octaedro regular.

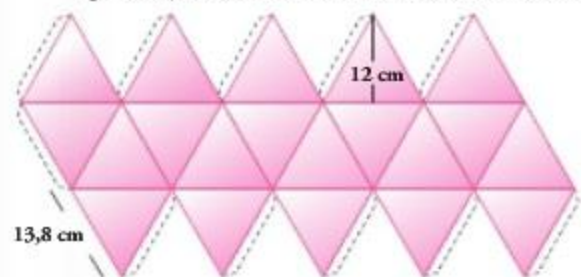
84.



85.



R 86. Calcula el área de la superficie del icosaedro regular cuyo desarrollo se muestra a continuación.



R 87. Halla el área de la superficie de un dodecaedro regular de 8 cm de arista, si cada pentágono correspondiente a sus caras tiene 5,5 cm de apotema.

P 88. Una hormiga se encuentra en un vértice de un octaedro y decide recorrer todas sus aristas sin pasar dos veces por la misma arista. Indica un posible camino.



I 89. Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

89. En un octaedro regular las caras pueden ser triángulos isósceles.
90. Un dodecaedro regular tiene 24 vértices.
91. Un hexaedro es un paralelepípedo.
92. Un icosaedro regular tiene 30 aristas.

I 93. El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) propuso la fórmula $C + V - A = 2$, en la que C es el número de caras de un poliedro, V es el número de vértices y A es el número de aristas de un poliedro. Completa la siguiente tabla. Luego, verifica que se cumpla la fórmula de Euler.

	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro 			
Cubo 			
Dodecaedro 			
Icosaedro 			

S Un hexaedro truncado es un cubo al cual se le han cortado las esquinas en igual medida, como se muestra en la figura. Completa.



94. Número de caras: _____

95. Números de aristas: _____

96. Número de vértices: _____

P 97. Escribe un problema relacionado con el volumen de un octaedro. Luego, resuélvelo aplicando las expresiones para calcular el volumen de una pirámide.



3. Cuerpos redondos



Recurso
imprimible

Un **cuerpo redondo** es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Los principales cuerpos redondos son el cilindro, el cono y la esfera.

3.1 Cilindro

Un **cilindro** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

Los cilindros se clasifican en rectos y oblicuos. Un cilindro recto se conoce como un sólido de revolución ya que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, el cual se denomina **eje de revolución**.

Los elementos del cilindro que se muestran en la figura 1 son:

- **Bases:** son las caras planas circulares que conforman el cilindro.
- **Altura:** es la medida del segmento perpendicular trazado desde una base hasta el plano que contiene a la otra base. Se simboliza con la letra h .
- **Radio:** es la medida del radio de cada base. Se simboliza con la letra r .

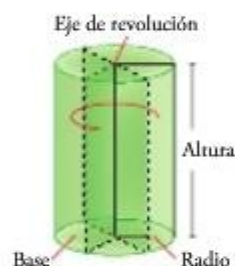
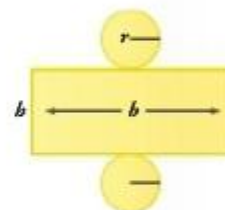


Figura 1. Elementos de un cilindro

El desarrollo de un cilindro corresponde a dos círculos de igual radio y a un rectángulo cuyo ancho es igual a la altura del cilindro, y cuyo largo es igual a la longitud de la circunferencia de la base, como se muestra en la figura. A partir de los elementos del cilindro y de su desarrollo se puede calcular el volumen V , el área lateral A_L y el área total A_T mediante las siguientes expresiones.



$$V = \pi r^2 h \quad A_L = 2\pi rh \quad A_T = 2\pi r(h + r)$$

EJEMPLO

La Torre Westhafen construida en la ciudad de Fráncfort (Alemania) es una torre con forma cilíndrica que cuenta con 31 pisos, cada uno con aproximadamente 3,5 m de altura. Si la longitud de la circunferencia de la base mide 119,32 m, determinar el área de su superficie exterior.

Primero, se determina la altura total de la torre. Para esto, se multiplica el número total de pisos por la altura de cada uno. Así, la altura total es:

$$31 \times 3,5 \text{ m} = 108,5 \text{ m}$$

Segundo, se halla el radio de la base despejando r en la expresión de la longitud de la circunferencia. $r = \frac{c}{2\pi}$ de donde $r = \frac{119,32}{2\pi} \approx 19 \text{ m}$

Luego, se calcula el área lateral A_L y el área de la base superior A_B reemplazando los valores de r y h . Así: $A_L = 2\pi(19)(108,5) \approx 12.952,79$ y $A_B = \pi(19^2) \approx 1.134,11$

Finalmente, el área de la superficie exterior de la torre es:

$$12.952,79 + 1.134,11 = 14.086,9 \text{ m}^2$$

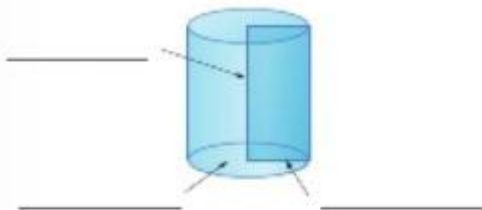




Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

- I** 98. Escribe los elementos del cilindro que se indican en la figura.



- E** Calcula el volumen aproximado de cada cilindro a partir de las medidas dadas.

99. Radio: 3 cm, altura: 6 cm

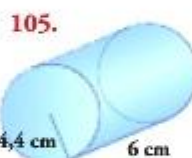
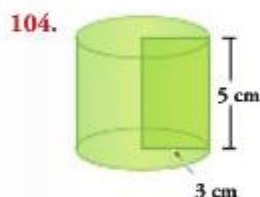
100. Diámetro: 4 cm, altura: 5 cm

101. Radio: 7 cm, altura: 10,5 cm

102. Diámetro: 24 cm, altura: 25 cm

103. Radio: 6,5 cm, altura: 10 cm

- E** Halla el área total de los siguientes cilindros.



- I** 106. A continuación se muestran dos recipientes cilíndricos A y B de una misma bebida. Explica por qué la bebida A es más económica que la B, a partir del volumen de los recipientes.



Bebida A
Precio: \$2.850



Bebida B
Precio: \$2.700

- R** Halla el área total de cada cilindro a partir de su altura h , si se sabe que el radio equivale a la tercera parte de la altura.

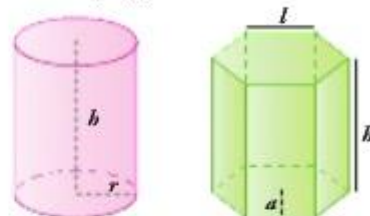
107. $h = 9$ cm

109. $h = 13,2$ cm

108. $h = 7,8$ cm

110. $h = 22,5$ cm

- R** 111. Propón medidas para el cilindro y el prisma hexagonal recto. Luego, compara sus volúmenes teniendo en cuenta que la altura h de ambos cuerpos geométricos es la misma.



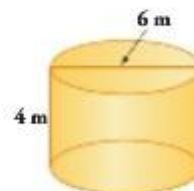
- R** 112. Calcula el volumen del cilindro que se genera al girar un rectángulo de 3,5 cm de ancho y 5,8 cm de alto respecto a su altura.

- S** El cilindro fonográfico fue el primer método utilizado para grabar y reproducir sonidos. Hacia el año 1890, algunas empresas decidieron estandarizar las medidas de los cilindros; fue así como se produjeron cilindros fonográficos de 10 cm de altura y 5,7 cm de diámetro.

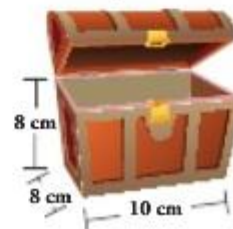
113. ¿Cuál era el volumen de un cilindro fonográfico?

114. ¿Cuál era el área total?

- S** 115. Un estanque con forma cilíndrica tiene una altura de 4 m y un diámetro de 6 m. Si solo está lleno hasta 3,5 m de altura, ¿cuántos metros cúbicos faltan para llenar completamente el estanque?



- S** 116. María utilizó una tela para forrar el siguiente cofre. ¿Cuántos metros cuadrados de tela como mínimo debió emplear?





3.2 Cono

Un **cono** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular.

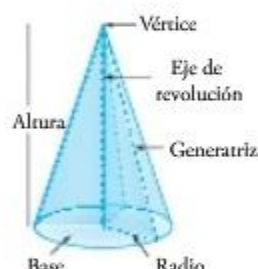


Figura 2. Elementos de un cono.

Recuerda que...

Para calcular la generatriz se utiliza la expresión:

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}$$

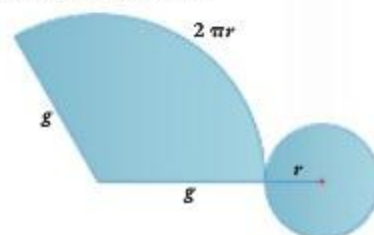
Los conos también se clasifican en rectos y oblicuos. Un cono recto se puede considerar como un sólido de revolución ya que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Este cateto es el **eje de revolución** y la hipotenusa del triángulo se conoce como **generatriz** y se simboliza con la letra g .

Otros elementos del cono, que se muestran en la figura 2, son:

- **Base:** es la cara plana circular del cono.
- **Vértice:** es el punto extremo del eje de revolución que no está en la base del cono.
- **Altura:** es la medida del segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta el plano que contiene la base. Se simboliza con la letra h .
- **Radio:** es la medida del radio de la base. Se simboliza con la letra r .

El desarrollo de un cono corresponde a un círculo de radio r y a un sector circular como se muestra en la figura. Para calcular el área lateral A_L , el área total A_T y el volumen V de un cono se utilizan las siguientes expresiones:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad A_L = \pi r g \quad A_T = \pi r(r + g)$$



EJEMPLO

Una empresa fabrica conos de helado. La siguiente tabla muestra las diferentes clases de conos que producen. Suponiendo que los conos son rectos, determinar el precio de venta de cada tipo de cono si cada cm^3 se vende a \$80.

Nombre	Altura (mm)	Diámetro (mm)
Cono mini	88	38
Cono danés	138	45

Primero, se convierten las medidas a centímetros dividiendo cada medida entre 10, así:

$$88 \div 10 = 8,8 \quad 38 \div 10 = 3,8 \quad 138 \div 10 = 13,8 \quad 45 \div 10 = 4,5$$

Luego, el radio del cono mini es de 1,9 cm y el del cono danés es de 2,25 cm. Por tanto, para calcular el volumen de ambos tipos de conos se reemplazan las medidas de los radios y de las alturas en la expresión $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

$$V_m = \frac{1}{3} \pi (1,9)^2 (8,8) \approx \frac{99,8}{3} \approx 33,27 \quad \text{Volumen del cono mini.}$$

$$V_d = \frac{1}{3} \pi (2,25)^2 (13,8) \approx \frac{219,48}{3} \approx 73,16 \quad \text{Volumen del cono danés.}$$

Finalmente, se multiplica el volumen de cada cono por el precio de cada centímetro cúbico.

$$33,27 \times 80 = 2.661,6 \quad \text{Costo del cono mini.}$$

$$73,16 \times 80 = 5.852,8 \quad \text{Costo del cono danés.}$$

Por tanto, el precio de venta aproximado del cono danés es \$5.852 y el del cono mini es \$2.661.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

- I** Dibuja en tu cuaderno un cono recto de 4 cm de altura y 3 cm de radio. Luego, responde.

117. ¿Cuánto mide la generatriz?
118. ¿Cuál es el perímetro de la base?

- E** Calcula el volumen y el área total de cada cono teniendo en cuenta que h es la altura, r es el radio de la base y d es el diámetro.

119. $r = 2$ cm, $h = 4$ cm
120. $d = 10$ cm, $h = 15$ cm
121. $r = 8$ cm, $h = 12$ cm

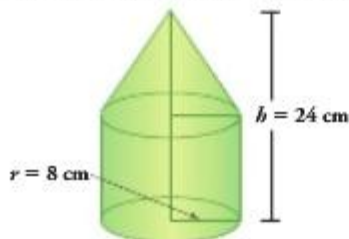
- R** Resuelve.

122. Completa la tabla.

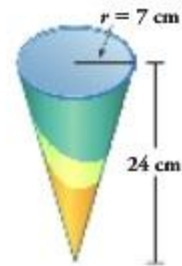
Altura	Radio	Volumen del cilindro	Volumen del cono
7,5 cm	4 cm		
10 cm	5,2 cm		
20 m	10 m		

123. Responde. ¿Cuál es la razón entre el volumen de un cilindro y el volumen de un cono que tienen la misma altura y el mismo radio?
- I** Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.
124. Si se duplica el radio de un cono, entonces, se cuadruplica su volumen.
125. Si se divide entre 3 la medida de la generatriz de un cono, entonces, su área lateral se duplica.
126. Si se divide entre 2 el perímetro de la base de un cono, entonces, el área lateral del cono es igual al producto del perímetro de la base dividido entre 2 por la medida de la generatriz.

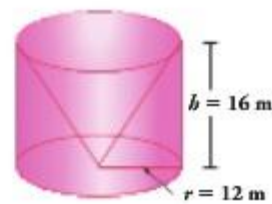
- R** 127. Calcula el volumen total del siguiente cuerpo.



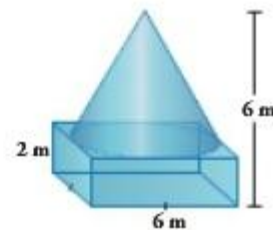
- I** 128. Para su fiesta, Roberto planea entregar sorpresas con forma de cono a sus 20 invitados. Si tiene 3 m² de cartulina, ¿le alcanzará para elaborar todas las sorpresas? Justifica tu respuesta.



- S** Un tanque de forma cónica está construido en el interior de una estructura cilíndrica, como se muestra en la siguiente figura.



129. Calcula la diferencia entre el volumen de la estructura cilíndrica y el volumen del tanque.
130. Supón que se quiere pintar el interior del tanque y la parte externa de la estructura cilíndrica. Si no se tiene en cuenta el grosor del tanque y de la estructura, ¿cuántos metros cuadrados deben pintarse?
- P** 131. Escribe una fórmula para calcular la suma de los volúmenes de un cono y de un cilindro que tienen el mismo radio r y la misma altura h .
- S** Una escultura elaborada en bronce está formada por un cono y un pedestal en forma de paralelepípedo, como se muestra en la siguiente figura.



132. Calcula cuántos metros cúbicos de bronce se necesitan para elaborar la escultura.
133. Una pintora cobra \$38.000 por decorar cada metro cuadrado de la superficie de la escultura. ¿Cuánto se le debe pagar a la pintora para que decore toda la escultura?



3.3 Esfera



Ampliación
multimedia



Actividad

Una **esfera** es un cuerpo redondo limitado por una sola superficie curva.

Recuerda que...

Si una esfera tiene centro C y radio r , entonces, toda circunferencia de la esfera con el mismo centro y el mismo radio se denomina **circunferencia máxima**.

La esfera también es un cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de su diámetro. Dicho diámetro es el eje de revolución.



Los elementos de una esfera son:

- **Centro:** es el punto que se encuentra a igual distancia de todos los puntos que conforman la superficie de la esfera. Se simboliza con la letra C .
- **Radio:** es la distancia del centro a cualquier punto de la superficie de la esfera. Se simboliza con la letra r .

El volumen V de una esfera y el área A de su superficie están dados por las siguientes expresiones:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ y } A = 4\pi r^2$$

EJEMPLOS

Para adornar el patio de una antigua edificación se construyó una esfera de piedra de 1,6 m de diámetro.



- a. Si se quiere aplicar estuco veneciano en la esfera y cada metro cuadrado cuesta \$32.000, ¿cuánto cuesta aplicar estuco veneciano en toda la esfera?

Primero, como el diámetro de la esfera es de 1,6 m, entonces, el radio mide 0,8 m.

Luego, se reemplaza la medida del radio para calcular el área de la superficie de la esfera.

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{Área de la superficie de la esfera.}$$

$$= 4\pi(0,8)^2 \quad \text{Se reemplaza la medida del radio.}$$

$$\approx 8,04 \quad \text{Se resuelven las operaciones.}$$

Finalmente, se tiene que el área de la superficie de la esfera es de aproximadamente 8,04 m². Por tanto, al multiplicar por \$32.000, resulta que el costo de aplicar estuco veneciano en la esfera es de \$257.280.

- b. Calcular la masa total de la esfera si se sabe que la masa de cada m³ de piedra con que fue construida pesa aproximadamente 900 kilos.

Primero, se calcula el volumen de la esfera.

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \text{Volumen de la esfera.}$$

$$= \frac{4}{3} \pi (0,8)^3 \quad \text{Se reemplaza la medida del radio.}$$

$$= \frac{4}{3} \pi (0,512) \quad \text{Se resuelve la potencia.}$$

$$\approx 2,14 \text{ m}^3 \quad \text{Se multiplica.}$$

Luego, se plantea la siguiente proporción:

$$\frac{1}{900} = \frac{2,14}{x} \quad \begin{array}{l} \text{Metros cúbicos} \\ \text{Masa} \end{array}$$

Finalmente, se despeja x .

$$x = 900 \times 2,14 = 1.926$$

Por tanto, la masa total de la esfera es aproximadamente 1.926 kilogramos.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **S** Soluciono problemas

- I** Observa la siguiente representación de la Tierra como una esfera. Luego, completa.



134. El eje terrestre es el eje de _____ de la esfera.
135. Las dos líneas que representan circunferencias máximas en la esfera son el _____ y el _____.
136. El _____ no es una circunferencia máxima de la esfera.
137. La distancia entre el Polo Norte y el Polo Sur representa el _____ de la esfera.
- E** Calcula el área y el volumen de cada esfera a partir de su radio r .

138. $r = 2$ cm 140. $r = 3,5$ dm

139. $r = 5$ cm 141. $r = 48$ mm

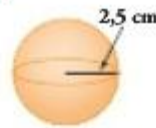
- P** 142. Completa la tabla.

r (cm)	$2r$	Volumen de la circunferencia de radio r	Volumen de la circunferencia de radio $2r$
1			
2			
3			
4			

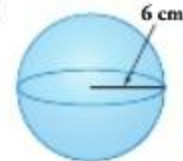
143. Escribe una expresión general para calcular la variación del volumen de una esfera cuando se duplica la medida de su radio r .

- E** Halla el área aproximada de la superficie de cada esfera.

144.

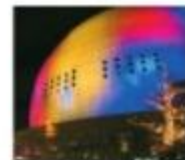


145.



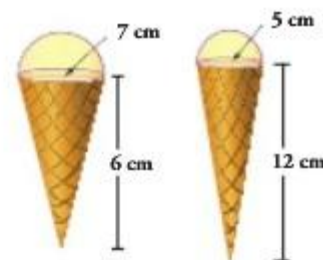
- A** 146. Explica qué ocurre con el volumen de una esfera si se cuadruplica el área de su superficie.

- S** Dos importantes construcciones del mundo tienen forma esférica: el Globo de Ericsson (Suecia) y el Centro Cultural Tijuana (México).

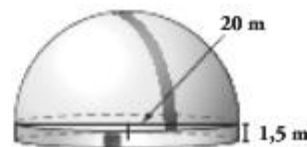


Edificación	Radio en metros
Globo Ericsson	55
Centro Cultural Tijuana	13

147. Determina el volumen de cada construcción.
148. Calcula el área de la superficie de cada edificación.
- S** 149. Supón que las siguientes figuras representan conos de helado. Calcula el precio de los conos si cada cm^3 de helado vale \$20 y el precio de venta de la galleta es \$40 por cm^2 .



- S** 150. Un observatorio astronómico tiene la forma que se muestra en la figura. ¿Cuál es su área lateral?





4. Capacidad



Actividad

La **capacidad** es la medida de la cantidad de líquido que puede contener un recipiente.

La unidad básica para medir la capacidad en el Sistema Métrico Decimal es el **litro**, que se simboliza como **L**. El litro equivale al volumen de un cubo cuya arista mide un decímetro de longitud. Por tanto, 1 L equivale a 1 dm^3 .

■ Los múltiplos del litro son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia en litros
Kilolitro	kL	1.000 L
Hectolitro	hL	100 L
Decalitro	daL	10 L

■ Los submúltiplos del litro son:

Nombre	Símbolo	Equivalencia en litros
decilitro	dL	0,1 L
centilitro	cL	0,01 L
mililitro	mL	0,001 L

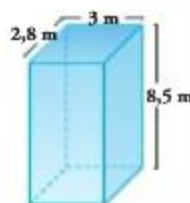
Matemáticamente

¿Por qué 1 m^3 equivale a 1 kL? Justifica tu respuesta.

Para realizar la conversión entre las anteriores unidades de medida, se debe tener en cuenta que cada unidad de medida es 10 veces mayor que la inmediatamente inferior y 10 veces menor que la inmediatamente superior. Así, para hallar la equivalencia de una unidad de orden superior a una de orden inferior se multiplica cada vez por 10, y para hallar la equivalencia de una unidad de orden inferior a una de orden superior se divide entre 10.

EJEMPLO

Un tanque de reserva de agua tiene forma de paralelepípedo como se muestra en la figura. Si en este momento el tanque contiene agua hasta los $\frac{3}{5}$ de su capacidad, ¿cuántos litros de agua faltan para llenar el tanque totalmente?



Primero, se calcula el volumen del tanque.

$$V = l \times a \times b$$

Volumen de un paralelepípedo.

$$= 8,5 \times 2,8 \times 3 = 71,4 \text{ m}^3 \quad \text{Se reemplazan las medidas y se multiplica.}$$

Luego, como 1 m^3 equivale 1 kL, entonces, la capacidad del tanque es de 71,4 kL. Además, se tiene que 71,4 kL equivalen a 71.400 L.

Finalmente, se multiplica la capacidad total del tanque por $\frac{3}{5}$ y se resta.

$$\frac{3}{5} \times 71.400 = 42.840 \text{ y } 71.400 - 42.840 = 28.560$$

Por tanto, hacen falta 28.560 litros de agua para llenar el tanque.

**Afianzo COMPETENCIAS**

I Interpreto • **A** Argumento • **P** Propongo • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- 1** Une con una línea cada medida de volumen con la medida de capacidad que le corresponde.

- 151.** 1 cm^3 **a.** 1 L
152. 1 m^3 **b.** 1 kL
153. 1 dm^3 **c.** 1 mL

- E** Completa las siguientes conversiones.

154. 3,2 kL = ____ L 158. 2 hL = ____ cL
155. 0,07 hL = ____ dL 159. 8 daL = ____ dL
156. 987,5 cL = ____ L 160. 0,004 kL = ____ L
157. 0,8 hL = ____ dL 161. 3.786 mL = ____ hL

- Relaciona cada recipiente con su correspondiente capacidad. Justifica tu respuesta.

162. 
163. 
164. 
165. 
166. 
167. 
- a. 0,5 kL
b. 425 cL
c. 225 L
d. 2 hL
e. 3.000 dL
f. 125 dL

- R** Expresa en litros cada medida de volumen.

- 168.** 1 m^3 y 23 dm^3
169. 4 m^3 y $5,2\text{ dm}^3$
170. 5 m^3 , 2 dm^3 y 300 cm^3
171. 8 m^3 , $1,85\text{ dm}^3$ y 1.000 cm^3

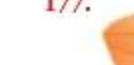
- 172.** La siguiente figura representa un recipiente formado por dos cilindros. Propón medidas para los radios y las alturas de los cilindros. Luego, calcula la capacidad del recipiente en litros.



- S** Resuelve.

173. En el sobre de un jugo instantáneo aparece la siguiente información: *Prepare un delicioso litro de jugo de naranja*. Si con el litro de jugo se llenaron cinco vasos, ¿cuál es la capacidad de cada vaso en mililitros?
174. Un grupo de ocho estudiantes llevan tres botellas de litro y medio de gaseosa para celebrar un torneo deportivo. ¿Cuántos vasos de 250 mL pueden servir?
175. Una piscina en forma de paralelepípedo mide 4,5 m de largo, 3,5 m de ancho y 2 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua se necesitan para llenar totalmente la piscina?

- R** Determina la capacidad en litros de cada envase.

176.  177. 

- S** Para regar las plantas de sus jardines, Luisa, María y Juan consumieron las siguientes cantidades de agua.

Luisa	4,5 hL
María	15.000 cL
Juan	0,6 kL

178. ¿Cuántos litros más consumió Luisa que María?
179. ¿Cuántos daL de agua consumieron entre los tres?

- S 180.** Felipe debe comprar 10 litros de jugo de naranja. Determina la opción más económica de acuerdo con la información dada.



Cristales de carbono

Los sólidos pueden agruparse en dos categorías: cristalinos y amorfos. El diamante, la sal y el hielo son sólidos cristalinos, tienen una estructura interna de red tridimensional ordenada y repetida. La unidad básica que se repite se llama celda unitaria. Todos los minerales en la naturaleza adoptan uno de siete tipos de celda unitaria al cristalizar.

Los sólidos amorfos, como el vidrio y los plásticos, no presentan la regularidad geométrica de los cristales y su estructura interna es más parecida a la de un líquido, ya que carecen de rigidez. Estos materiales en realidad no poseen las características del estado sólido: sin geometría molecular, no hay verdaderos sólidos.



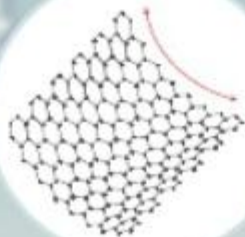
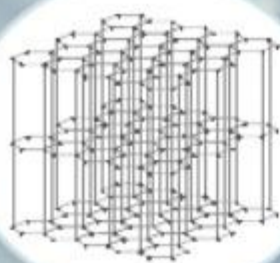
Los diamantes

La gema más valiosa es el diamante. Un cristal de intrincada estructura y de la más simple composición de puro carbono.

Fibra de carbono

Un compuesto más ligero que el acero, es la fibra de carbono con igual resistencia, inmune a la corrosión, que puede adoptar diversas formas y adaptarse a las necesidades, por ejemplo, en la estructura de una bicicleta futurista.





Un nanotubo de carbono se forma al enrollar una capa de grafeno, que presenta una forma cilíndrica.

Grafito

Es un material básico de la naturaleza, está formado por átomos de carbono, tiene una estructura hexagonal. El grafito se encuentra en los lápices.

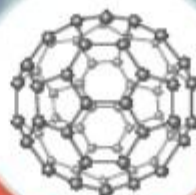
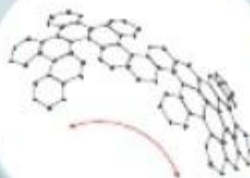
Grafeno



Enlace web

Es una red cristalina formada por hexágonos que en cada vértice tienen un átomo de carbono, es un material extremadamente delgado, resistente y transparente.

El grafeno se puede obtener a partir del grafito normal, el material de las minas de los lápices, gracias a ello los físicos Andre Geim y Konstantin Novoselov obtuvieron el Premio Nobel en Física.



Cuando el grafeno se envuelve de manera redondeada, produce fullerenos, que forman moléculas esféricas denominadas *buckybolas*.



Volumen

- Realiza las siguientes conversiones entre unidades de medida de volumen.

181. $0,48 \text{ dam}^3$ a dm^3

182. 3.500 m^3 a hm^3

183. 42 km^3 a cm^3

184. $7,2 \text{ mm}^3$ a cm^3

- El volumen de un cubo es de 9.261 cm^3 .

185. ¿Cuál es el volumen del cubo en metros cúbicos?

186. ¿Cuál es el perímetro de una de sus caras en decímetros?

Poliedros

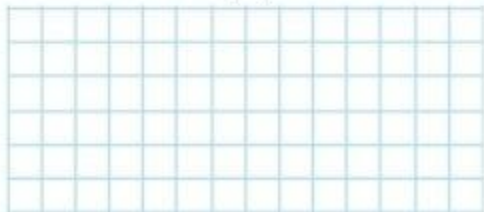
- Calcula el volumen de cada paralelepípedo a partir de las medidas que se indican.

187. Largo: $3,5 \text{ m}$; ancho: 2 m ; alto: $1,8 \text{ m}$

188. Largo: $3,5 \text{ cm}$; ancho: 20 mm ; alto: 12 cm

189. Largo: 8 dm ; ancho: $7,5 \text{ cm}$; alto: $2,4 \text{ cm}$

190. El ancho de un paralelepípedo mide 4 cm y su largo es el cuádruple de su altura. Si el volumen del paralelepípedo es 64 cm^3 , ¿cuál es la medida del largo y del alto?

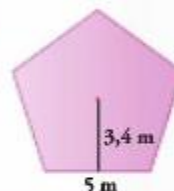


- Calcula el volumen y el área total de los prismas rectos, si su altura es de 10 m y sus bases son los siguientes polígonos regulares.

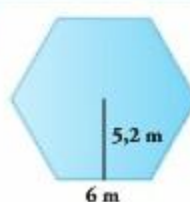
191.



193.



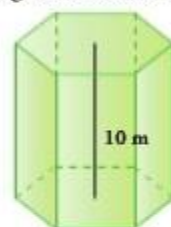
192.



194.



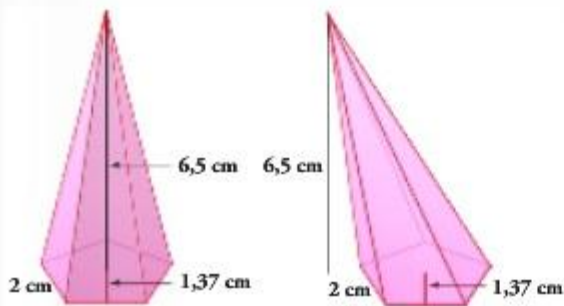
- Los depósitos de una fábrica de jugos tienen forma de prisma hexagonal, como se muestra en la figura.



195. Determina el volumen de cada depósito si se conoce que el área del fondo es 258 m^2 .



Observa las pirámides. Luego, resuelve.

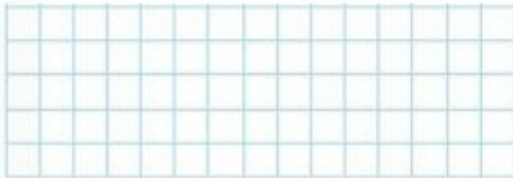


196. Clasifica cada pirámide.

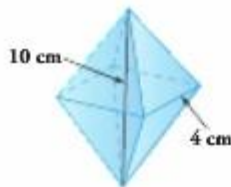
Pirámide 1: _____

Pirámide 2: _____

197. Calcula el volumen de cada pirámide.



Una artesanía de madera tiene forma de octaedro con las medidas que se muestran en la siguiente figura.



198. Halla el volumen de la artesanía.



199. Calcula cuántos centímetros cuadrados de madera se requieren para fabricar 10 artesanías de las mismas. Ten en cuenta que la altura de cada cara es 5,38 cm.



Cuerpos redondos

Escribe el volumen V y el área total A_T de cada cilindro a partir de su radio r y su altura h .

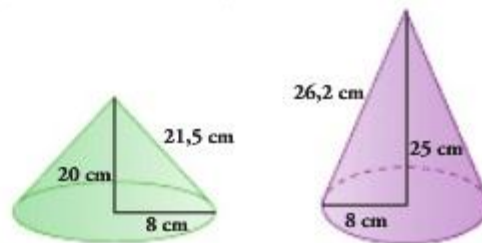
200. $r = 7$ dm, $h = 9$ dm

$V =$ _____ $A_T =$ _____

201. $r = 460$ mm, $h = 8$ cm

$V =$ _____ $A_T =$ _____

Calcula el volumen y el área total de cada cono.



202.

$V =$ _____

$A_T =$ _____

203.

$V =$ _____

$A_T =$ _____

204. Halla el radio aproximado de una esfera en metros, si su volumen es de $33.510.400$ cm³.



Capacidad

205. Expresa la siguiente medida en litros.

$5,6$ m³, 3 dm³ y 876 cm³

206. En una zona rural se emplearon 50 m de manguera de 3 pulgadas de diámetro para el paso del agua. Determina la cantidad de agua, en litros, que circula constantemente por la manguera.





PROBLEMAS PARA REPASAR

La cafetera térmica que se muestra en la imagen tiene forma cónica. La medida del contorno de la base es 75,36 cm y la altura es 30 cm.

Si se sabe que el volumen de la tapa, que también es de forma cónica, es 47,1 cm³, ¿cuál es la cantidad de café que puede contener la cafetera cuando está llena?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la cantidad de café que puede contener la cafetera cuando está llena?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se tiene que el contorno de la base de la cafetera es de 75,36 cm y su altura es de 30 cm. Además, el volumen de la tapa de la cafetera es de 47,1 cm³.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se calcula el radio de la base de la cafetera. Para esto, se remplazan los valores de $C = 75,36$ y $\pi = 3,14$, en la expresión $C = 2\pi r$, así:

$$75,36 = 2 \times 3,14 \times r, \text{ de donde, } r = \frac{75,36}{6,28} = 12 \text{ cm}$$

Segundo, se calcula el área de la base mediante la expresión $A_b = \pi r^2$.

$$A_b = 3,14 \times 144 = 452,16 \text{ cm}^2$$

Luego, se calcula el volumen de la cafetera remplazando los valores de A_b y h en la expresión $V = \frac{1}{3}(A_b \times h)$.

$$V = \frac{1}{3}(452,16 \times 30) = 4.521,6 \text{ cm}^3$$

Finalmente, para saber la cantidad real de café que puede contener la cafetera, se calcula la diferencia entre el volumen total y el volumen de la tapa: $4.521,6 - 47,1 = 4.474,5 \text{ cm}^3$.

Como un centímetro cúbico equivale a un mililitro, entonces, la capacidad de la cafetera es 4.474,5 mL, es decir, aproximadamente 4,475 L.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Para verificar la respuesta se revisa que se hayan aplicado correctamente las expresiones para calcular el área de la base de la cafetera y su volumen. Además, al sumar la capacidad de la cafetera y la capacidad de su tapa, el resultado deber aproximadamente 4,52 litros, es decir:

$$0,0471 \text{ litros} + 4,475 \text{ litros} \approx 4,52 \text{ litros.}$$

Luego, la cantidad de café que puede contener la cafetera cuando está llena es 4,474 litros.

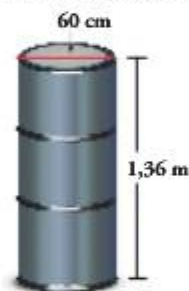
Un horno para la elaboración de panela tiene forma semiesférica.



- 207.** Determina el mayor contenido de miel de caña que puede contener, si se sabe que la medida del borde es de 31,4 m.

Responde las preguntas 208 a 210 de acuerdo con la siguiente situación.

La imagen muestra las medidas de un barril de petróleo.



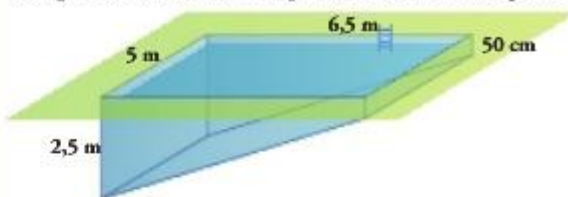
- 208.** ¿Cuál es la capacidad en litros del barril?

- 209.** Suponiendo que Colombia produce en la actualidad un millón de barriles diarios de petróleo como el que se muestra en la figura, ¿cuál es la capacidad en kL de producción de petróleo diario en Colombia?

- 210.** Si el costo de cada litro de petróleo crudo es de \$5.676, ¿cuánto dinero se recauda al vender la cantidad de petróleo que puede contener el barril de la imagen?

Responde las preguntas 211 a 213 de acuerdo con la siguiente situación.

Una piscina tiene la forma que se muestra en la figura.



- 211.** ¿Cuál es la capacidad total de la piscina?

- 212.** Si solo está llena hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad total, ¿cuántos litros de agua se requieren para llenarla completamente?

[illegible]

- 213.** ¿Cuál es el costo de llenar la piscina completamente si cada m^3 de agua tiene un valor de \$2.000?

- 214.** Un tanque de almacenamiento de gas natural tiene forma esférica y un diámetro de 20 m. ¿Cuántos m^3 de gas contiene el tanque cuando está lleno?





...Para conocer las dimensiones de los obstáculos utilizados en paintball.

El *paintball* es un deporte donde se enfrentan, generalmente, dos equipos con pistolas de gas comprimido que disparan pelotas de pintura. Su objetivo es tomar la bandera del otro equipo o eliminar a todos los jugadores del equipo contrario.

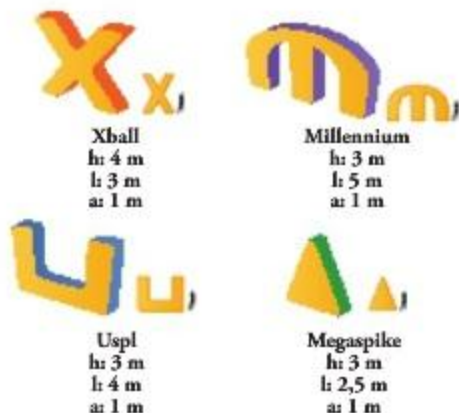


En la actualidad existen diferentes modalidades, algunas son:

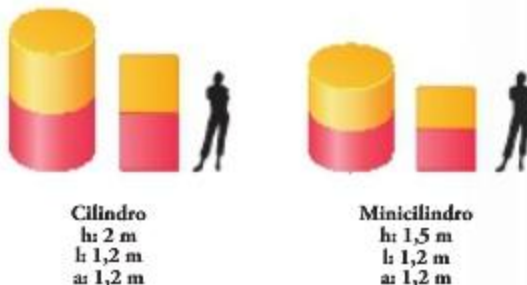
Woodsball: es aquel que se juega en ambientes boscosos. Por lo general, el objetivo en este terreno es capturar la bandera del equipo contrario en un intervalo de tiempo indefinido.

Mode 10: es practicado en terrenos con obstáculos artificiales y es una modalidad que se juega en tiempos muy cortos con dos equipos de cinco jugadores. El objetivo es eliminar a todos los rivales.

En los diferentes terrenos y equipamientos de los competidores se pueden observar poliedros y cuerpos redondos. En las siguientes imágenes se observan las dimensiones de algunos de los obstáculos más utilizados.



También hay obstáculos con forma de cuerpos redondos, como los siguientes cilindros, a los cuales se les puede calcular el área total para determinar la cantidad de material necesario para su fabricación.



Para hallar el área total del minicilindro, primero se calcula el área de la base A_B .

$$A_B = \pi \cdot r^2$$

$$A_B = \pi \cdot 0,6^2 \approx 1,13 \text{ m}^2$$

Luego, se halla el área lateral A_L .

$$A_L = P_B \cdot h$$

$$A_L = 2\pi r \cdot h$$

$$A_L = 2\pi \cdot 0,6 \cdot 1,5 \approx 5,65 \text{ m}^2$$

Finalmente, el área total A_T es igual a la suma de A_L y de $2A_B$.

$$A_T = 2,26 + 5,65 = 7,91 \text{ m}^2$$

1. Encuentra el área total y el volumen del cilindro.
2. Cada bola de pintura tiene un diámetro de 0,62 cm. ¿Cuál es su volumen?
3. Cada pistola de *paintball* necesita tener un tanque de gas comprimido. Su forma es generalmente cilíndrica como se muestra en la fotografía.



Si su capacidad es de 500 cm³ y su diámetro 5 cm, ¿qué longitud debe tener?

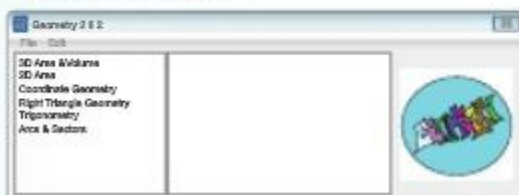
Trabaja con Geometry 2.8.2

Objetivo: calcular el volumen y el área de la superficie de los principales cuerpos redondos.

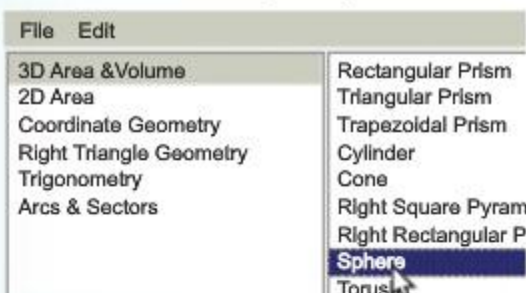
Descripción: utilizar Geometry 2.8.2 para hallar el volumen y el área de la superficie de una esfera de radio 4. Luego, calcular el área de un cono de altura 10 y de radio 5, utilizando 3,14 como aproximación del número π .

Para acceder a Geometry, ingresa y descarga el programa en: geometry.softonic.com

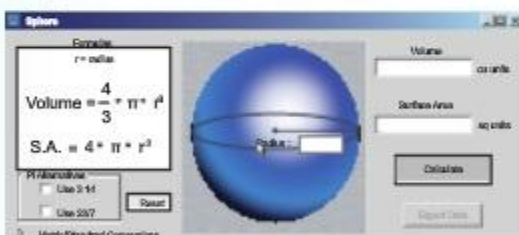
- 1 En el escritorio haz clic en la carpeta **Geometry1**, luego en **Geometry PC 2.8.2** y, por último, en la aplicación **Geometry**. Se abrirá la siguiente ventana.



- 2 En la ventana de la parte izquierda haz clic en **3D Area & Volume**. Luego, en la ventana del centro, haz clic en la opción **Sphere**.



- 3 En la ventana de la derecha nos debe mostrar la figura de una esfera como se puede ver en la siguiente imagen. Luego, oprime la tecla **Enter** y se activará la siguiente ventana con las expresiones para calcular el volumen y el área de la superficie de la esfera.

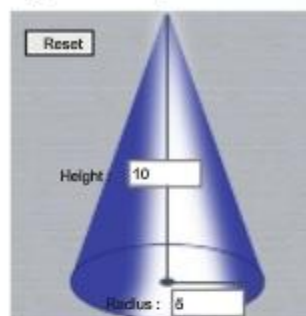


- 4 Digita 4 en la casilla **Radius** que aparece dentro de la esfera.

- 5 Haz clic en **Calculate** y aparecerán el volumen y el área de la superficie de una esfera de radio 4.



- 6 Cierra la ventana **Sphere** y en la opción **3D Area & Volume** presiona **Enter** en **Cone**. Aparecerá un cono con las casillas para digitar las medidas de la altura y del radio de la base. Digita en **Height** 10 y en **Radius**, 5.



- 7 Elige la aproximación del número haciendo clic, por ejemplo, en **Use 3.14** del cuadro **Pi Alternatives**. Luego, haz clic en **Calculate** y aparecerán el volumen y el área total del cono.



- 8 Utiliza Geometry 2.8.2 para hallar el volumen y el área total de:
 - a. Un cono de 6 cm de altura y 4 cm de radio.
 - b. Un cilindro de 15 cm de altura y 8 cm de radio.

7

Estadística y probabilidad

Estándar: pensamiento aleatorio

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer los conceptos de estadística.
- Caracterizar correctamente variables cuantitativas, con datos agrupados y datos no agrupados.
- Construir y analizar las diferentes representaciones gráficas de datos estadísticos.
- Comprender la probabilidad simple, las propiedades de probabilidad y algunas técnicas de conteo.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

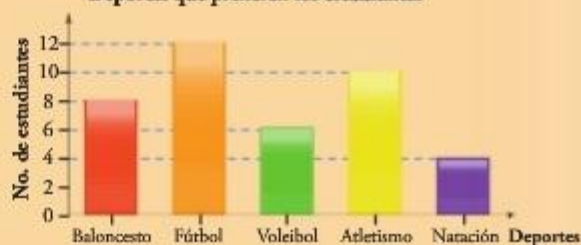
- ✓ De desempeño
- ✓ Prueba Saber

- | | |
|--|--|
|  3 Multimedia |  1 Audio |
|  1 Galería |  5 Imprimibles |
|  5 Actividades |  2 Enlaces web |

Lo que sabes...

1. En un taller de arte se inscribieron 18 niñas y 32 niños.
 - a. ¿Qué porcentaje de los inscritos son niñas? ¿Y qué porcentaje son niños?
 - b. Si después se inscribieron 10 niñas más, ¿qué porcentaje de niñas hay ahora?
 - c. Si se retiraran 10 niños, ¿qué porcentaje de niños habría ahora?
2. Elabora una tabla que corresponda a los datos del siguiente diagrama.

Deportes que prefieren los estudiantes





Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para desarrollar análisis en biología.

La **bioestadística** es la rama de la estadística que se dedica a las aplicaciones de esta ciencia en el área biológica. Es decir, en campos tan diversos como la medicina, las ciencias agropecuarias y las ciencias forestales.

Más que la aplicación de técnicas estadísticas, la bioestadística es una disciplina en sí y su campo se encuentra en constante evolución y desarrollo, lo que permite contestar preguntas claves de la investigación en salud.

■ Lee más acerca de este tema en la página 282.

Cronología de la estadística

Egipto. Según Heródoto, historiador griego, se hizo un censo para conocer la cantidad de población y las ganancias del imperio.

Italia. Los nuragas, habitantes de la isla de Cerdeña, tenían monumentos donde grababan datos para llevar la cuenta del ganado y la caza.



Alemania. Sebastián Muster realizó un compilado estadístico de datos sociales, políticos y económicos del país.

Roma. Marco Aurelio, emperador romano, llevó registro del número de nacimientos y fallecimientos durante su mandato.

Inglaterra. Edmund Halley aplicó conceptos estadísticos en estudios que realizó sobre la vida humana.

Alemania. Gaspar Neumann usó la estadística para demostrar creencias erróneas sobre el número de nacimientos o muertes en algunas fechas especiales.

Bélgica. Lambert Jacques Quételet, en su obra *La antropometría*, aplicó la estadística moderna en la medida de las diferentes características del hombre.





Recuerda que...

La **variable** es una característica de la población o de la muestra cuya medida puede cambiar de valor. Según su naturaleza puede ser cualitativa y cuantitativa.

Una **variable cualitativa** es aquella que representa cualidades, atributos o características no numéricas.

Una **variable cuantitativa** es aquella característica de la población o de la muestra que es posible representar en forma numérica.

1. Conceptos iniciales



Actividad

Siempre que el ser humano aprende algo, su instinto de aplicación lo lleva a preguntar: ¿y eso para qué sirve? En algunos casos, en matemáticas surgen dificultades para mostrar aplicaciones sencillas de conceptos elaborados, pero este problema se hace casi nulo cuando el contenido que se va a tratar es de estadística.

La **estadística** es la rama de las matemáticas que se encarga del análisis e interpretación de la información.

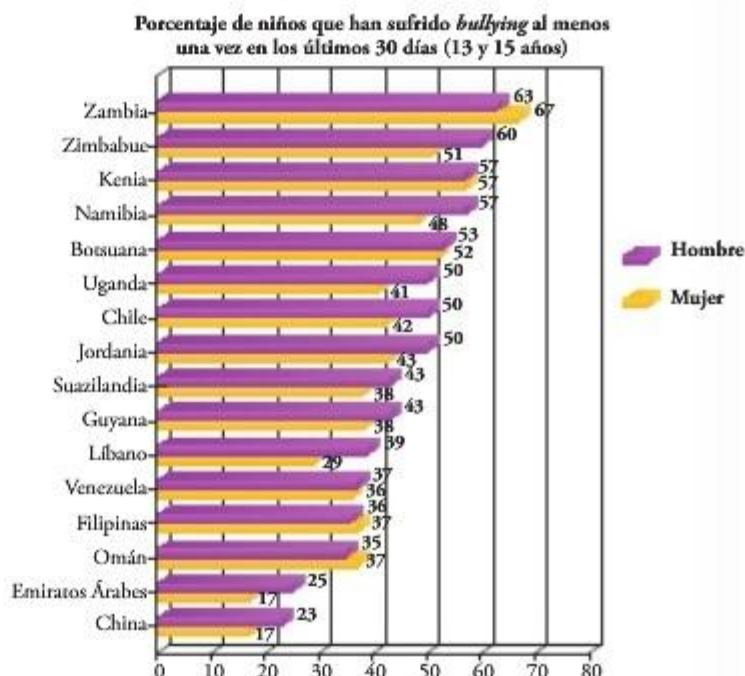
Y surge la pregunta de rigor: ¿qué información? Y la respuesta es: la información de cualquier tipo: edades, precios, gustos o preferencias, accidentes, ventas, compras y, en fin, todo aquello relacionado con la humanidad que, para efectos de estudio de la estadística, será una población o una muestra.

Cada una de estas informaciones se expresa en forma de variables y lo que hace específicamente la estadística es estudiar dichas variables.

Son muchos los esfuerzos que se hacen en la actualidad, en todo el mundo, para comprender y detener en los colegios el fenómeno del *bullying* o matoneo, un fenómeno de hostigamiento entre pares.

El interés en este tema se mantiene por la consistencia de los resultados de las investigaciones, que plantean que existen consecuencias negativas sobre la salud y bienestar emocional de aquellos estudiantes que son repetidamente blanco de agresiones por parte de sus propios compañeros y compañeras de colegio.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en un estudio relacionado con el *bullying*; el estudio fue emprendido por la ONU (Organización de Naciones Unidas).



Fuente: Elaboración propia de acuerdo con Pinheiro, P. (2006) *World Report on Violence against Children, Cap 4_ In schools and educational Settings*; New York: Organización de Naciones Unidas (ONU)



Como se puede observar en el contexto del problema y en la gráfica, se está haciendo uso de la estadística en búsqueda del análisis y solución de un problema que invade el entorno escolar y con frecuencias muy altas en los estudiantes de 13 y 15 años.

Cuando se hace un estudio estadístico es importante tener en cuenta algunos conceptos que, si bien son de uso cotidiano, tienen definiciones específicas en el contexto de la estadística.

- Una **fuentes de datos** es un medio de donde procede la información. Los datos se pueden obtener de diferentes fuentes de información ya existentes o mediante censos, encuestas y estudios experimentales.
- Una **encuesta** es un método de recolección de datos. Se lleva a cabo, generalmente, a través de un cuestionario que se le aplica a los individuos de la muestra o población.
- El **período de referencia de una encuesta** es el lapso o espacio de tiempo durante el cual se obtiene la información de la encuesta y la referencia cronológica respecto a la cual se valida la información inherente a ella.
- Un **censo** es una investigación estadística que consiste en el recuento de la totalidad de los elementos que componen la población que se va a investigar.
- La **inferencia estadística** es una parte de dicha ciencia cuya finalidad es obtener conclusiones respecto a la población a partir de datos observados en muestras. Es el proceso por medio del cual se hacen aseveraciones o estimaciones de un todo a partir de sus partes o elementos.
- Un **estrato** es una subpoblación o parte de una población que reúne características comunes que la hacen homogénea. Los estratos son mutuamente excluyentes, es decir que los elementos que pertenecen a un estrato no pueden pertenecer a otro.
- La **estratificación** es un procedimiento por medio del cual una población se divide en estratos; esto se hace con el propósito de seleccionar una muestra separada de cada grupo.
- Un **estadístico**, también conocido como estadígrafo, es el valor calculado con base en los datos que se obtienen de una muestra y, por tanto, es una estimación de los parámetros. En este libro se mostrarán algunos estadígrafos que son de uso común en estadística.

Un concepto importante que no puede dejar de tenerse en cuenta, pues afecta a diario, es el de IPC (Índice de precios al consumidor).

- El IPC es un indicador económico que muestra la variación de los precios de un conjunto de bienes y servicios, lo que comúnmente se conoce como canasta familiar, que consumen habitualmente un grupo representativo de familias de diversos estratos socioeconómicos de un país.

Este indicador muestra qué tanto más caros o más baratos están los productos de la canasta familiar en el período actual, en comparación con un período base y se expresa como un porcentaje. Este índice cambia en períodos de tiempo y dicho cambio se muestra según las mediciones que haga el organismo encargado que, para el caso de nuestro país, es el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística).



Matemáticamente

¿Qué tipo de preguntas muestran las encuestas que presentan por televisión, con respecto a las posibilidades de respuestas?



Actividad

Recurso
imprimible

2. Caracterización de variables cuantitativas

Como se ha explicado anteriormente una **variable cuantitativa** es aquella característica de la población o de la muestra que es posible representar numéricamente; por ejemplo, la edad, la talla, el peso, entre otras.

Es factible clasificar las variables cuantitativas teniendo en cuenta qué tipo de números son. Así, las variables cuantitativas pueden ser:

- **Discretas:** cuando los valores de la variable pertenecen a un conjunto numerable (por ejemplo, los enteros).
- **Continuas:** cuando la variable puede tomar cualquier valor en un rango determinado.

EJEMPLO

La Secretaría de Integración Social pretende promover un programa preventivo de salud basado en el ejercicio en casa. Este programa está focalizado en personas adultas de estrato 3 de un barrio del noroccidente de la ciudad.

Para iniciar dicho programa se decidió preguntar a un grupo de personas con edades entre 35 y 45 años sobre la frecuencia (número de veces) con la que practican actividad física a la semana. Las respuestas fueron las siguientes:

1	2	2	2	4	3	3	5	4	4	2
2	2	0	0	0	1	0	2	0	1	5
0	0	1	5	2	0	0	1	1	0	2

¿Qué tipo de variable se está estudiando en este caso?

La frecuencia con la que se hace ejercicio se puede clasificar como una variable cuantitativa y, por tanto, es posible estudiar el comportamiento de dicha variable, lo que, en términos estadísticos, es caracterizarla.



Es importante tener en cuenta que cada vez que se caracteriza una variable, sea cualitativa o cuantitativa, se persigue un fin específico con la población que se está estudiando. Por ello, analizar con seriedad y precisión la información es la base para obtener unas buenas conclusiones que beneficien el estudio y que cumplan por tanto el fin con el cual se emprende dicho estudio. Para caracterizar una variable cuantitativa se debe tener en cuenta la forma como se van a presentar los datos, lo cual puede ser:

- En forma agrupada.
- En forma no agrupada.

A continuación se describe el proceso para presentar los datos en forma agrupada.

2.1 Caracterización en forma agrupada

Si al caracterizar la variable, se pretende entregar la información de tal manera que todos los datos se reúnan teniendo en cuenta comportamientos similares, se pueden utilizar las siguientes herramientas: diagrama de tallo y hojas, tabla de distribución de frecuencias, histograma, polígono de frecuencias y ojiva.

Recuerda que...

La caracterización de una variable cuantitativa consiste en presentar la información obtenida con base en ella, de tal forma que se puedan establecer conclusiones respecto a su comportamiento en la población estudiada.

El **diagrama de tallo y hojas** es una primera representación gráfica de los datos de una muestra. En él se clasifican los datos teniendo en cuenta la expresión decimal de cada uno de ellos, es decir, las unidades, decenas, centenas, etc.

Las hojas siempre corresponden a la cifra de las unidades del número y el tallo a la cifra de las decenas si el número es de dos cifras, o las cifras de las decenas y las centenas si el dato es de tres cifras.

1. El profesor de ciencias sociales está haciendo un estudio sobre el tiempo que sus estudiantes dedican a hacer investigación previa sobre los temas que van a trabajar en el bimestre. Para ello, seleccionó 10 estudiantes de cada uno de los cuatro cursos de bachillerato en los cuales da clase y les preguntó por el tiempo en minutos que emplean en dicha acción. Los resultados fueron los siguientes:

25	35	21	12	15	5	35	45	40	30
20	34	27	19	25	15	17	40	62	15
34	60	35	25	35	50	20	34	35	25
19	55	10	14	47	40	25	38	36	34



Organizar los datos en un diagrama de tallo y hojas y escribir algunas conclusiones sobre ellos.

La variable relacionada en este caso es cuantitativa; para organizar la información en el respectivo diagrama se examinan los datos y se determina, inicialmente, que los datos están planteados en unidades y decenas. Para los datos de unidades es posible tomar la decena como el valor 0. Por ejemplo, para los datos 25, 21, 20, 27, el tallo sería 2 y la hojas 5, 1, 0 y 7, respectivamente.

Tallo $\rightarrow$ 2 || 5 1 0 7 $\leftarrow$ Hojas

La idea del diagrama es organizar la información, escribiendo todos los datos en el tallo y en las hojas. Para hacer este ejercicio se realiza lo siguiente:

Primero, se dibuja el diagrama y se escriben inicialmente todos los tallos; en este caso los tallos son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Luego, se ubican las unidades de cada dato (hojas) teniendo en cuenta las decenas (tallos), así:

Diagrama de tallo y hojas de los tiempos de investigación en ciencias sociales

[illegible]

John Wilder Tukey
(1915-2000)



Fue uno de los más importantes estadistas del siglo XX.

Creó el diagrama de tallo y hojas para representar datos y visualizarlos mejor.



En el diagrama se puede ver que:

- 1 persona emplea 5 minutos en la investigación.
- 9 personas emplean entre 10 y 19 minutos en la investigación.
- 9 personas emplean entre 20 y 29 minutos en la investigación.
- 12 personas emplean entre 30 y 39 minutos en la investigación.
- 5 personas emplean entre 40 y 49 minutos en la investigación.
- 2 personas emplean entre 50 y 59 minutos en la investigación.

Como se puede observar, el diagrama organiza la información en clases que, en particular, son decenas. En cada una de estas clases se está agrupando la información; es más, si se quiere presentar la información con un mayor grado de organización, los datos del diagrama se pueden organizar dentro de cada clase de menor a mayor.

La clase en la cual se encuentra la mayor cantidad de datos se denomina **clase modal**.

Algunas conclusiones del diagrama se presentan a continuación:

- La mayor cantidad de estudiantes emplean entre 30 y 39 minutos preparando la investigación de la clase.
- Solo una persona gasta 5 minutos en la investigación.
- 30 de los 40 estudiantes preparan la investigación de la clase entre 10 y 39 minutos.
- 4 estudiantes preparan la investigación en tiempos que van desde 50 hasta 62 minutos.

2. En un instituto de francés se aplicó un examen a los estudiantes de nivel avanzado de dos de sus grupos. El objetivo de la prueba era examinar y calificar de 1 a 100 el nivel de pronunciación de cada uno de los 28 estudiantes del grupo. A continuación se presentan los resultados:

Grupo A	65	34	82	73	56	71	40
	61	46	67	58	70	63	46
	45	57	64	80	67	58	60
	57	78	38	43	72	60	63
Grupo B	34	41	50	52	58	63	60
	40	45	54	50	38	58	62
	61	34	70	57	63	80	72
	71	67	56	48	39	53	65

Usar el diagrama de tallo y hojas para comparar el desempeño de los dos grupos.

En este caso, es necesario elaborar el diagrama para cada uno de los grupos. Eso puede hacerse de dos maneras: separado o unido. Lo que sí es importante tener en cuenta es que, para este caso, resulta útil hacer el registro ordenado de los datos. Esto permitirá hacer de manera más fácil y acertada la comparación.

El diagrama de tallo y hojas ordenado, para cada grupo es:

Grupo A									
3	4	8							
4	0	3	5	6	6				
5	6	7	7	8	8				
6	0	0	1	3	3	4	5	7	7
7	0	1	2	3	8				
8	0	2							

Recuerda que...

El diagrama de tallo y hojas es una herramienta muy útil en la organización de la información, pero también se hace rápida y efectiva cuando lo que hay que analizar es la comparación entre dos muestras distintas.



Grupo B									
3	4	4	8	9					
4	0	1	5	8					
5	0	0	2	3	4	6	7	8	8
6	0	1	2	3	3	5	7		
7	0	1	2						
8	0								

El diagrama se puede hacer unido, tomando las hojas a derecha e izquierda del tallo. Así:

Grupo A										Grupo B									

A partir de los diagramas se observa que:

- En el grupo A, el mayor número de estudiantes obtuvo puntajes entre 60 y 69; en el grupo B, el mayor número de estudiantes obtuvo puntajes entre 50 y 59.
- En el grupo A, 10 estudiantes obtuvieron puntajes entre 40 y 59; en el grupo B, 13 estudiantes obtuvieron puntajes en la misma clase.
- Se puede apreciar que los resultados del examen de francés fueron mejores en el grupo A que en el grupo B.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

1. Escribe una situación en la que sea necesario utilizar la estadística para tomar decisiones.

1. Situación: _____

Identifica en la situación anterior cada uno de los siguientes conceptos:

2. Fuente: _____

3. Período de referencia: _____

4. Población: _____

5. Estrato: _____

6. Variable estudiada: _____

7. En una empresa de confecciones se contabiliza la producción de unidades de camisetas deportivas que arma en un día cada una de las operarias. A continuación se registran los datos en una semana del mes de noviembre:

34	25	34	29	30	29	39	49	57	65
67	73	57	48	60	45	68	46	41	40
46	55	29	20	63	55	49	40	37	47

7. Elabora el diagrama de tallo y hojas correspondiente a la información.

8. Determina cuántas operarias se encuentran ubicadas en cada una de las clases generadas.

9. Teniendo en cuenta el número de operarias en cada clase, escribe tres conclusiones a partir de la información obtenida.



- E** El departamento de mercadotecnia de una empresa fabricante de productos de belleza planea poner en el mercado una nueva marca de cremas antiarrugas. Para ello, decide preguntar la edad de las usuarias de su línea facial actual.



A continuación se presentan los resultados:

25	45	29	48	32	51	44
37	48	21	45	30	27	42
26	34	46	54	45	23	30
21	30	37	37	47	49	25

10. Elabora el diagrama de tallo y hojas para la situación.
11. ¿Cuántas usuarias tienen entre 30 y 39 años?
12. ¿En cuál intervalo están ubicadas la mayoría de las usuarias?
13. Si la compañía decide promover el producto en un solo rango de edad, ¿en cuál debería hacerlo? ¿Por qué?
14. ¿En cuál intervalo de edad definitivamente no tendría éxito el producto?

- R** El Instituto Colombiano de Bienestar Familiar está emprendiendo una campaña para que los niños entre 2 y 5 años consuman más leche.

Para iniciar la campaña, preguntó en 48 jardines de Bienestar por la cantidad de vasos de leche que consumen en una semana los infantes ubicados en este rango de edad. Los resultados se muestran en la siguiente base de datos:

95	104	127	147	105	132	146	88
123	146	132	142	149	117	145	82
145	132	148	128	136	101	134	93
112	121	139	123	127	121	126	90
98	153	128	117	107	137	122	118
113	89	104	123	140	89	97	103

15. Elabora el diagrama de tallo y hojas para esta situación.
16. ¿Cuál es la clase modal?
17. ¿Qué significado tiene la clase modal en esta situación?

- L** En vista de la temporada invernal y el incremento de enfermedades respiratorias en adultos mayores, la Secretaría de Salud ha decidido determinar cuántos pacientes con la afección mencionada llegan al servicio de urgencias de los hospitales del sector suroccidental de una ciudad.

Los resultados de 30 hospitales se registran a continuación:

45	75	93	99	91	48
98	64	108	78	90	101
109	62	34	85	67	46
99	80	49	67	43	63
76	89	46	84	41	100

18. Para esta situación, ¿cuál es la clase modal?
19. ¿Cuántos de los hospitales reciben 80 o más pacientes?
20. Realiza el diagrama de tallo y hojas y escribe tres conclusiones teniendo en cuenta la información planteada en él.

- S** La información sobre el número de llamadas diarias que hacen los diferentes operarios desde el call center de un banco se registran a continuación:

7	4	3	5	6	5		
8	1	3	7	8	6	6	3
9	0	0	4	1	3	3	
10	1	0	1	4	7	9	9
11	9	7	9	6	4		



21. ¿Cuántos operarios hay en el call center del banco?
22. ¿Cuántas llamadas hacen a diario?
23. ¿Dentro de qué rangos está el mayor número de llamadas?
24. ¿Cuántos operarios hacen menos de 90 llamadas diarias?



Tablas de distribución de frecuencias



Recurso
imprimible

Una **tabla de distribución de frecuencias** es un arreglo de filas y columnas en el cual se registra, de manera ordenada y clasificada, la información de una base de datos.

La tabla de distribución de frecuencias está formada por los siguientes elementos:

- **Intervalos de clase:** se ubican en la primera columna de la tabla. En cada intervalo se incluye el grupo de datos que está entre el valor donde inicia (límite inferior) y el valor en el que termina (límite superior). Tienen la particularidad de ser disjuntos y ordenados, lo cual implica que cada dato queda incluido en uno y solo un intervalo.
- **Frecuencia del intervalo:** número de individuos o datos que están clasificados en cada intervalo. Se representa con la letra f .
- **Frecuencia relativa:** relación entre la frecuencia y el total de la muestra o población; se representa como fr . Esta relación se expresa mediante el cociente $\frac{f}{n}$ en donde n es el número de datos. Al multiplicar fr por 100 se obtiene el porcentaje de los datos que están en dicha clase.
- **Frecuencia acumulada:** es la sumatoria del número de individuos que están en los intervalos anteriores y la frecuencia del intervalo. Se representa por F .
- **Frecuencia relativa acumulada:** se representa por Fr y se plantea como la relación entre la frecuencia acumulada y el total de la muestra, es decir, $Fr = \frac{F}{n}$.
- **Marca de clase:** es el punto medio de cada intervalo y se considera como el dato más representativo de dicho intervalo. Se representa por M_c .

Para elaborar una tabla de distribución de frecuencias se realiza el siguiente procedimiento:

Primero, se calcula el número de intervalos. Para ello se utiliza la siguiente expresión:

$$\# \text{ intervalos} \approx \sqrt{n}$$

donde n es el número de elementos de la muestra o población.

Segundo, se calcula el rango de la distribución, que es la diferencia entre el dato mayor (D_M) y el dato menor (D_m) de la base de datos:

$$\text{Rango} = D_M - D_m$$

Tercero, se calcula el tamaño de cada intervalo:

$$\begin{aligned} \text{Tamaño} &= \frac{\text{Rango}}{\# \text{ intervalos}} \\ &= \frac{D_M - D_m}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Luego, se construyen los intervalos. Para ello, se toma el dato menor como límite inferior del primer intervalo y a este valor se le suma el tamaño del intervalo para encontrar el límite superior.

Para el segundo intervalo, se toma como límite inferior el límite superior del primer intervalo más uno.

Finalmente, se ubican los datos en la tabla comenzando con la frecuencia y, luego, completando las columnas mencionadas al inicio de esta explicación.

Recuerda que...

Las estadísticas recomiendan formar entre 5 y 20 intervalos, pero este criterio es relativo teniendo en cuenta las características de la muestra o población.



Historia de las matemáticas

Estadística

La palabra estadística fue introducida originalmente, mediante el término alemán *Statistik*, por Gottfried Achenwal en 1749, para referirse al análisis de datos del estado.

Ya en el siglo XIX, el británico John Sinclair utilizó el término estadística para referirse a la recolección, clasificación y análisis de datos.



EJEMPLO

Para determinar los factores óptimos de crecimiento de un hongo comestible, un equipo de ingenieros de alimentos realizó un experimento que consistió en cultivar dicho hongo en 50 muestras diferentes y observar, después de 60 días, los cuerpos fructíferos que generó cada cultivo.



Los resultados se presentan a continuación:

123	116	167	198	165	148	169	110	121	100
145	132	145	126	176	189	163	101	120	109
135	127	178	187	180	166	134	129	118	102
167	185	183	177	156	145	167	143	132	121
145	128	119	117	140	121	164	129	132	140

Elaborar el diagrama de tallo y hojas y la tabla de distribución de frecuencias y presentar algunas conclusiones relacionadas con la información.

El diagrama de tallo y hojas de la situación es el siguiente:

Cuerpos fructíferos de hongo comestible										
10	0	1	2	9						
11	0	6	7	8	9					
12	0	1	1	1	3	6	7	8	9	9
13	2	2	2	4	5					
14	0	0	3	5	5	5	5	8		
15	6									
16	3	4	5	6	7	7	7	9		
17	6	7	8							
18	0	3	5	7	9					
19	8									

La tabla se elabora siguiendo el procedimiento presentado en la página anterior. Así:

Primero, el número de intervalos es $\# \text{ intervalos} = \sqrt{n}$

$$\# \text{ intervalos} = \sqrt{50} = 7,07 \approx 7$$

Segundo, para calcular el rango de la distribución se tiene que

$$D_M = 198 \text{ y } D_m = 100$$

$$\text{Rango } D_M - D_m = 198 - 100 = 98$$

Tercero, se calcula el tamaño del intervalo:

$$\begin{aligned} \text{Tamaño} &= \frac{\text{Rango}}{\# \text{ intervalos}} \\ &= \frac{D_M - D_m}{\sqrt{n}} = \frac{98}{7} = 14 \end{aligned}$$



Cuarto, se construyen los intervalos. Así:

■ Primer intervalo

Límite inferior: 100

Límite superior: $100 + 14 = 114$

[100, 114]

■ Segundo intervalo

Límite inferior: 115

Límite superior: $115 + 14 = 129$

[115, 129]

■ Tercer intervalo

Límite inferior: 130

Límite superior: $130 + 14 = 144$

[130, 144]

■ Cuarto intervalo

Límite inferior: 145

Límite superior: $145 + 14 = 159$

[145, 159]

■ Quinto intervalo

Límite inferior: 160

Límite superior: $160 + 14 = 174$

[160, 174]

■ Sexto intervalo

Límite inferior: 175

Límite superior: $175 + 14 = 189$

[175, 189]

■ Séptimo intervalo

Límite inferior: 190

Límite superior: $190 + 14 = 204$

[190, 204]

Se debe tener en cuenta que, como los intervalos deben ser disjuntos, el límite superior del primer intervalo debe ser diferente al límite inferior del segundo intervalo (en forma similar con todos), por ello se debe sumar uno al límite superior para encontrar el límite inferior del intervalo inmediatamente siguiente.



Quinto, al ubicar los datos en la tabla se realiza un conteo para escribir las frecuencias y realizar ciertos cálculos para ubicar el valor correspondiente en las columnas f , F , Fr , M_i y, por supuesto, el porcentaje.

■ Para el primer intervalo se tiene:

Frecuencia absoluta, $f = 5$

Frecuencia relativa, $fr = \frac{5}{50}$

Porcentaje, $fr \times 100 = \frac{5}{50} \times 100 = 10\%$

Frecuencia acumulada, $F = 5$

Frecuencia relativa acumulada, $Fr = \frac{5}{50}$

Marca de clase, $M_i = \frac{100 + 114}{2} = 107$

■ Para el segundo intervalo se tiene que:

$$F = 5 + 14 = 19 \text{ y } Fr = \frac{19}{50}$$

Continuando el proceso, tendremos la siguiente tabla de distribución de frecuencias:

Tabla de distribución para el caso de los cuerpos fructíferos

Clase	f	fr	%	F	Fr	M_i
[100, 114]	5	$\frac{5}{50}$	10	5	$\frac{5}{50}$	107
[115, 129]	14	$\frac{14}{50}$	28	19	$\frac{19}{50}$	122
[130, 144]	8	$\frac{8}{50}$	16	27	$\frac{27}{50}$	137
[145, 159]	6	$\frac{6}{50}$	12	33	$\frac{33}{50}$	152
[160, 174]	8	$\frac{8}{50}$	16	41	$\frac{41}{50}$	167
[175, 189]	8	$\frac{8}{50}$	16	49	$\frac{49}{50}$	182
[190, 204]	1	$\frac{1}{50}$	2	50	1	197

Con base en la tabla se puede concluir, entre otras cosas, que

- 14 de los hongos dieron entre 115 y 129 cuerpos fructíferos. Este valor fue el más alto registrado en el experimento y equivale a 28%.
- 8 hongos estuvieron entre 130 y 144 cuerpos fructíferos, igualmente 8 hongos estuvieron entre 160 y 174, lo mismo pasa con los 8 hongos que dieron entre 175 y 189. En cada caso corresponden al 16%.



Enlace web

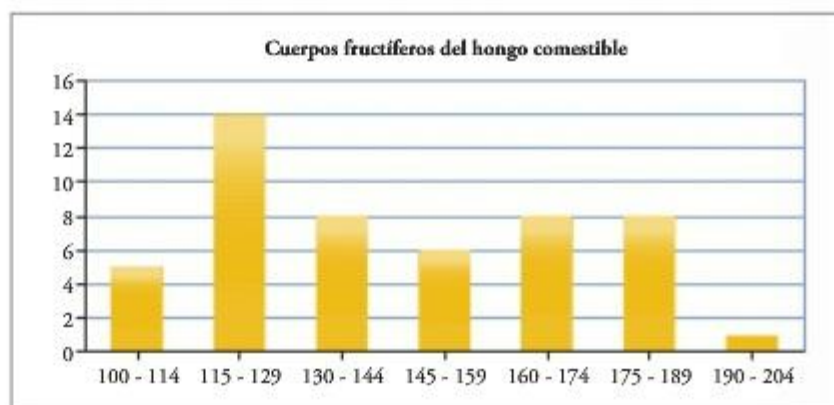


Histograma y polígono de frecuencias

Un **histograma** es una representación gráfica de los datos de una tabla de distribución de frecuencias de una variable cuantitativa. Es un diagrama de barras en el cual cada una de ellas representa la frecuencia.

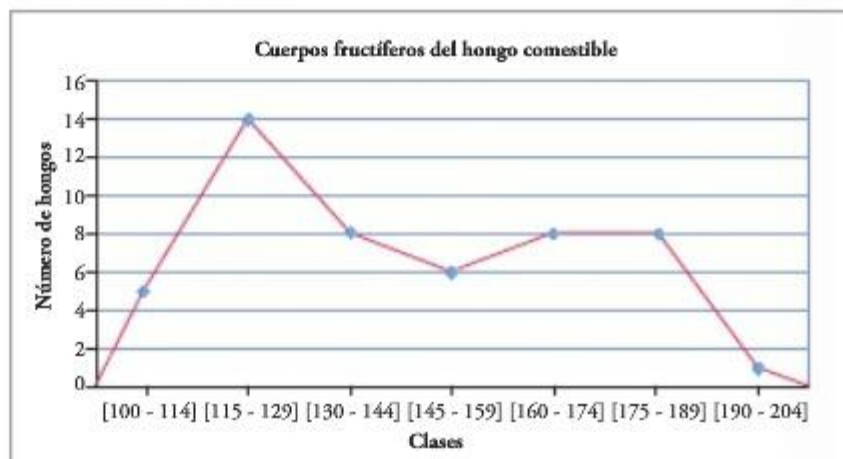
El histograma se dibuja sobre un plano cartesiano en el cual el eje x representa las clases de la variable estudiada y el eje y representa las frecuencias (absoluta o acumulada). La altura de la barra es el valor de la frecuencia.

Por ejemplo, el histograma correspondiente al ejemplo de los cuerpos frutíferos del hongo comestible es el siguiente:



Teniendo como base el histograma, se puede construir el polígono de frecuencias de la distribución.

Para ello, se marca sobre cada barra la marca de clase del intervalo (M_i) y se unen estos puntos con líneas rectas, así:



Nótese que para que la figura dibujada sea un polígono, se trazaron las líneas que unen el primer y el último punto con el eje x ; además, como solo se usan las marcas de clase, no es necesario dibujar las barras.

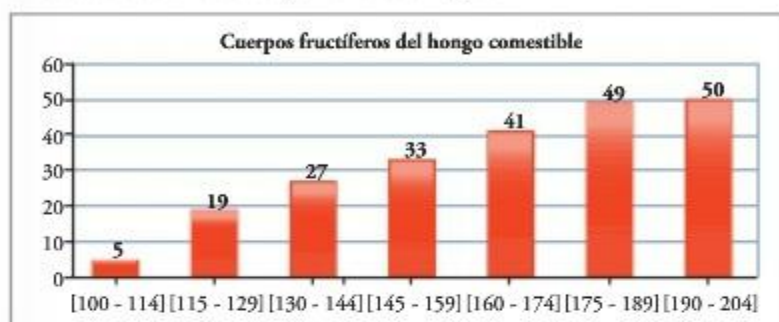
Así, un polígono de frecuencias es un diagrama formado al asignar a cada marca de clase la frecuencia correspondiente a ese intervalo.



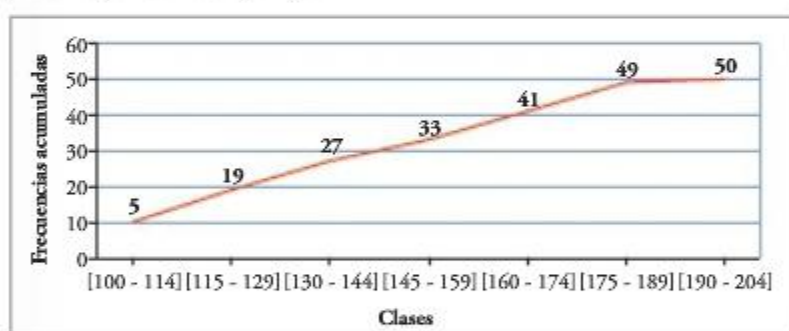
Ojiva

La **ojiva** es una gráfica para la cual sobre el eje x se ubican las marcas de clase M_i y sobre el eje y se marcan las frecuencias acumuladas de la distribución.

Es posible dibujar el histograma usando las frecuencias acumuladas. En este caso, el gráfico resultante tendrá barras que van creciendo, así:



Cuando se señala con un punto la marca de clase sobre cada barra y se unen estos puntos por medio de una línea, se genera una curva llamada **ojiva**. A continuación se presenta la ojiva correspondiente al ejemplo:



En la ojiva se observa que entre los intervalos existe un crecimiento uniforme.

A partir de todas las caracterizaciones vistas se pueden obtener conclusiones sobre cualquier ejemplo, en este caso sobre los hongos fructíferos.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Razono • Soluciono problemas

Lee el ejemplo de la página 254. Luego, escribe las operaciones para hallar los datos de cada uno de los siguientes intervalos, en la tabla de distribución de frecuencias.

25. Tercer intervalo

f : _____ F : _____

fr : _____ Fr : _____

%: _____ M_c : _____

26. Cuarto intervalo

f : _____ F : _____

fr : _____ Fr : _____

%: _____ M_c : _____

27. Quinto intervalo

f : _____ F : _____

fr : _____ Fr : _____

%: _____ M_c : _____



- R** En un conjunto residencial se ha emprendido una campaña para promover el ahorro del agua. La primera parte de esta campaña consiste en hacer el registro de cuántos metros cúbicos de agua se gastan a diario.

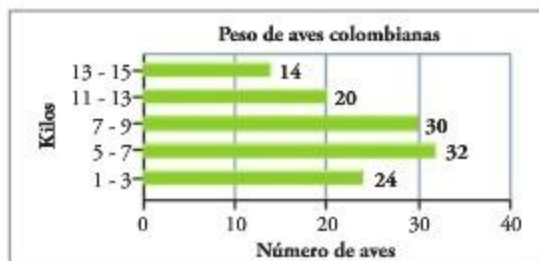


Los datos de las primeras mediciones se registran a continuación:

25	27	30	37	21
25	27	24	22	19
26	23	21	22	27
26	21	23	25	17
27	34	37	22	20
20	30	16	12	11

- 28.** Elabora la tabla de frecuencias para agrupar los datos y organizar la información.
- 29.** A partir de la tabla, elabora el histograma, el polígono de frecuencias y la ojiva correspondiente.
- 30.** Escribe tres conclusiones teniendo en cuenta los estadísticos anteriores.

- R** Un centro de protección de la biodiversidad va a fomentar un plan alimenticio para las aves de una región colombiana. Para ello, está estudiando los pesos de las aves de la región y de esta manera determinará el complejo vitamínico que necesitan. Los resultados se presentan a continuación:



- 31.** Analiza los datos de la gráfica y reconstrúyelos en la respectiva tabla de distribución de frecuencias.
- 32.** Dibuja el histograma proponiendo las barras en forma vertical.
- 33.** Construye el respectivo polígono de frecuencias y la ojiva.
- 34.** Teniendo en cuenta los estadísticos elaborados, escribe tres conclusiones sobre el grupo de aves de la muestra.

- S** A continuación se registran los pesos, en gramos, de varios bebés que nacieron el mismo día. Los datos han sido organizados por género:

Niños

2.450	3.100	3.200
2.380	2.650	2.690
3.150	2.500	3.400
3.450	2.890	3.350
2.790	2.900	3.200
2.980	3.120	2.950

Niñas

2.750	2.950	2.150
2.350	2.870	1.450
2.950	2.890	3.100
3.100	2.900	2.950
3.200	3.120	2.860
3.000	3.200	3.000

- 35.** Elabora los histogramas teniendo en cuenta el género. Hazlo en dos gráficas diferentes.
- 36.** Dibuja el polígono de frecuencias para el caso de las niñas.
- 37.** Dibuja el polígono de frecuencias para el caso de los niños.
- 38.** Compara los dos polígonos de frecuencias y escribe algunas conclusiones en relación con el peso de los niños y las niñas.
- 39.** ¿Cambia el área de dichos polígonos? Explica tu respuesta.
- 40.** Dibuja la ojiva para los dos grupos de datos.
- 41.** ¿Qué interpretación se puede dar a la ojiva? Escríbela para cada caso.



- S** Un grupo de estudiantes universitarios está planeando un estudio para analizar cuánto dinero gastan a diario en materiales para una clase de artes plásticas. A continuación se registraron los datos:

15.400	10.500	11.500	9.800
12.300	20.400	21.400	21.100
18.500	16.700	9.700	16.400
18.600	17.800	20.100	10.500
17.800	21.600	16.900	11.300
10.000	19.800	21.000	20.500
16.300	14.500	11.300	11.400

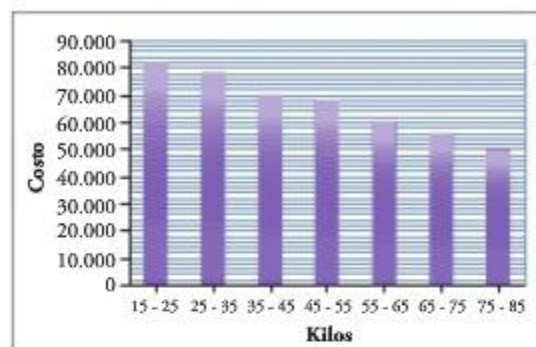
42. Elabora una tabla de distribución de frecuencias que organice los gastos de los estudiantes.
43. Dibuja el histograma y el polígono correspondientes para la situación.
44. Escribe algunas conclusiones teniendo en cuenta el histograma, el polígono y la tabla de distribución de frecuencias.
45. Dibuja el histograma, usando las frecuencias porcentuales. ¿Cambia la interpretación de la variable? Explica tu respuesta.
46. Dibuja el histograma usando las frecuencias acumuladas. Escribe algunas conclusiones relacionadas con dicho histograma.

- R** A continuación se presenta el polígono de frecuencias de la variable número de libros que alquila la biblioteca de un colegio en los días hábiles del mes de abril.



47. Reconstruye la tabla de distribución de frecuencias que generó el polígono.
48. Dibuja el histograma correspondiente.
49. Escribe algunas conclusiones a partir de la caracterización de la variable.

- S** Para presentar un informe a la gerencia general de una empresa se ha elaborado el siguiente histograma.



50. Elabora la tabla de distribución de frecuencias correspondiente al histograma.
51. Escribe algunas conclusiones con relación a la variable estudiada.

- O** Observa la siguiente tabla.

Recorrido (km)	f (Buses)	f_r	%	F	F_r	M_i
150-156			12			
157-163	8		32			
164-170						
171-177			28			
178-184			4			

52. Completa la tabla del recorrido (en kilómetros) de los buses de una empresa.
53. Responde, ¿cuántos buses tiene la empresa?

- 1** La duración en horas del uso de 35 dispositivos electrónicos es la siguiente:

666	480	496	724	780	801	570
830	570	802	795	886	714	680
680	775	712	683	830	560	660
720	826	560	794	676	760	708
710	890	590	750	489	725	751

54. Si una empresa quiere crear un nuevo dispositivo eléctrico. ¿Cuántas horas debe durar? Justifica tu respuesta.
55. Elabora dos representaciones gráficas a partir de los datos.



Actividad

**Matemáticamente**

¿Cuál es la media de las edades en tu curso? y ¿cuál es la media de las estaturas?

2.2 Caracterización en forma no agrupada

Es posible determinar las características de una muestra o población cuando las observaciones allí incluidas se presentan en forma no agrupada. Para ello, se usan, entre otras, las medidas de tendencia central. Las **medidas de tendencia central** son datos de resumen que indican, de acuerdo con algún criterio, un valor alrededor del cual se distribuyen las observaciones de un estudio estadístico. Las medidas de tendencia central son tres: la media, la mediana y la moda.

La media

La **media aritmética**, también conocida como **promedio**, es una de las medidas más utilizadas para la caracterización de una variable. Se ubica en el centro de las observaciones.

- Si la media se calcula en una muestra se representa por $\bar{x}$.
- Si la media se calcula en una población se representa por μ .

La media de un conjunto de datos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ se calcula mediante la expresión:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

EJEMPLO

En la sección de urgencias de un hospital se está estudiando la mutación de un nuevo virus respiratorio que se viene presentando en la temporada invernal y que afecta mayoritariamente a niños entre 2 y 4 años.

Para ello, se está llevando la estadística que consiste en registrar la hora de llegada de los niños con los síntomas iniciales, medicarlos y darles manejo ambulatorio. Luego, si el paciente vuelve con los síntomas del virus, se registran las horas transcurridas desde la primera consulta hasta el momento de la nueva atención. A continuación se registran los datos de 30 niños en estas condiciones:

Tiempo de mutación de virus respiratorio (horas)

8	9	12	6	11	10
9	9	10	12	11	12
12	13	10	9	10	11
11	11	12	13	9	10
10	10	11	12	10	11



Determinar la media o el promedio y escribir una conclusión acerca de los resultados.

En este caso, resulta importante determinar el tiempo en el que el virus está mutando para organizar los equipos tanto médicos como del hospital para garantizar la atención oportuna a los pacientes.

Para calcular el promedio, se suman los tiempos en horas y se dividen entre 30. Así:

$$\bar{x} = \frac{8 + 9 + 12 + 11 + \dots + 12 + 11 + 10 + 11}{30} = \frac{314}{30} = 10,46 \text{ horas}$$

Así, en promedio, el virus muta en 10,46 horas.

Esto significa que es muy probable que, si un paciente adquiere el virus y no ha vuelto al servicio de urgencias en 10 horas es porque en dicha persona la enfermedad ha desaparecido.



La mediana

La **mediana** es el valor que divide el conjunto de observaciones en dos partes porcentualmente iguales. Se representa con $\tilde{x}$.

Al igual que la media, la mediana no necesariamente hace parte del conjunto de datos.

Para calcularla, primero se ordena el conjunto de datos de menor a mayor y luego, se ubica entre ellos el dato central.

- # Si el número de datos es impar, la mediana es exactamente el dato central.
- # Si el número de datos es par, la mediana es el promedio de los dos datos centrales.

La moda



Enlace web

La **moda** en un conjunto de datos no agrupados es el dato de mayor frecuencia, es decir el que más se repite. Se simboliza con $\hat{x}$.

- # Cuando en un conjunto hay dos datos con una frecuencia alta, se dice que es bimodal.
- # En el caso de que el conjunto tenga varios datos en los cuales la frecuencia alta se repite, se dice que es polimodal.
- # Si simplemente no hay ningún dato que se repita, se dice que la moda no existe.

EJEMPLOS

El profesor de deportes registró el tiempo que sus estudiantes se demoran haciendo los ejercicios relacionados con unas pruebas físicas específicas. A continuación se presentan los resultados.

Tiempo de pruebas físicas (minutos)					
18	25	23	31	30	28
19	21	23	32	25	23
21	18	22	27	30	28
24	20	27	19	31	26



- a. Determinar la mediana y escribir una conclusión acerca de este dato en relación con la situación.

Para hallar la mediana se realiza lo siguiente:

Primero, se ordenan los datos para hallar la mediana. Puede ser mediante un diagrama de tallos y hojas como el siguiente:

Diagrama de tallo y hojas para tiempos de pruebas físicas

1	8	8	9	9											
2	0	1	1	2	3	3	3	4	5	5	6	7	7	8	8
3	0	0	1	1	2										

Luego, se determina entre qué valores puede estar ubicada la media.

Como el conjunto tiene 24 datos, la mediana se ubicará como el promedio de los datos 12 y 13. El dato 12 es 24 minutos y dato 13 es 25 minutos.

Finalmente, se calcula el promedio de los datos hallados en el paso anterior. Así:

$$\tilde{x} = \frac{24 + 25}{2} = 24,5$$

Es decir, el 50% de los tiempos está por debajo de 24,5 minutos y el 50% de los datos se encuentra por encima de 24,5 minutos.

- b. Hallar la moda.

En este caso se tiene que la moda $\hat{x} = 23$ minutos. Ya que este es el dato que se repite con mayor frecuencia.



c. Calcular la media. Luego, observar los tres datos y realizar una comparación a partir de las tres medidas de tendencia central.

Se suman los datos y se divide entre el número total de datos que es 24, así:

$$\bar{x} = \frac{18 + 18 + 19 + 19 + \dots + 31 + 31 + 32}{24} = \frac{591}{24} = 24,625 \text{ minutos}$$

Luego, se observa que:

$$\bar{x} = 24,625 \text{ minutos} \quad \tilde{x} = 24,5 \text{ minutos} \quad \hat{x} = 23 \text{ minutos}$$

Entonces, se tiene que las tres medidas están muy cercanas para dicho conjunto de datos. Esto tiene implicaciones al hacer el análisis de los datos, pero dicho análisis se trabajará en cursos superiores cuando se estudie el tema de distribuciones de probabilidad.

2.3 Ventajas y desventajas de las medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central cumplen una función muy importante en la interpretación de datos. De hecho su gran ventaja está en que son de fácil cálculo y de fácil interpretación. A continuación se presenta un resumen de las ventajas y desventajas de cada una de las medidas de tendencia central.

Medida	Ventajas	Desventajas
Media	• Es la medida de tendencia central más usada. • En su cálculo se emplea toda la información disponible. • Se expresa en las mismas unidades de la variable en estudio. • Es un valor único. • Puede ser usada como un detector de variaciones en los datos. • Es útil para comparar simultáneamente conjuntos de datos diferentes pero que hacen referencia a la misma variable.	• Es muy sensible a los valores extremos. • Puede o no pertenecer al conjunto de datos. • Si el conjunto de datos es muy grande, entonces su cálculo es tedioso. • No se puede calcular para variables cualitativas.
Mediana	• Es fácil de calcular, incluso si el número de observaciones es grande. • No se ve influenciada por valores extremos. • Es fácil de entender e interpretar.	• No utiliza en su cálculo toda la información disponible. • No tiene en cuenta la cantidad de veces que se repite un mismo dato. • Hay que ordenar el conjunto de datos antes de calcularla.
Moda	• No requiere cálculos. • Se puede calcular tanto en variables cualitativas como cuantitativas. • Es fácil de interpretar. • No se ve afectada por valores extremos.	• En conjuntos de datos pequeños, su interpretación no es muy útil. • No siempre existe. • Es difícil de interpretar si el conjunto de datos es multimodal.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

- I** 56. Explica cómo se halla cada una de las medidas de tendencia central.

E Los estudiantes de 6º, 7º y 8º están presentando pruebas para pertenecer al equipo de baloncesto del colegio. El entrenador les dijo que, además de sus habilidades específicas para el deporte, tendría en cuenta a la hora de la clasificación, el promedio de estatura.

Las estaturas, en centímetros, de los candidatos se muestran a continuación:

Estaturas de los jugadores

156	163	149	152	159
148	172	154	161	163
162	162	160	159	158
149	161	164	162	160



57. Calcula el promedio de estatura de los candidatos para el equipo de baloncesto.
58. Ordena los datos y determina el valor de la mediana.
59. Responde, ¿hay alguna moda en el conjunto de datos?
60. El entrenador dice que los estudiantes que estén por debajo de la estatura promedio no podrán ingresar al equipo. ¿Cuántos estudiantes saldrán del equipo teniendo en cuenta este criterio? ¿Cuántos estudiantes quedarán dentro del equipo?
61. Consideras que en este caso, utilizar el promedio como criterio de selección es un buen argumento? Justifica tu respuesta.
62. El estudiante cuya talla es 172 cm ha desistido de estar en el equipo pues tiene problemas de salud, ¿cambia esto el promedio y, por tanto, los estudiantes que ingresan al equipo? Justifica tu respuesta.

63. De igual manera, el estudiante que mide 163 cm ha decidido no participar. ¿Cambia notablemente el promedio? Explica tu respuesta.
64. Relaciona las respuestas dadas en los numerales 57 y 60 y elabora un párrafo que justifique la diferencia.
65. Con las condiciones iniciales del problema determina la mediana.
66. Escribe una conclusión sobre el conjunto de datos teniendo en cuenta el valor de la media, la mediana y la moda.
67. Si tú fueras el entrenador de baloncesto, ¿qué criterios usarías en la selección de los jugadores del equipo de baloncesto?

- S** Después de realizar una investigación sobre el promedio, en pesos, que invierten las personas que trabajan en el centro de la ciudad, en su almuerzo, se determinó que este valor es de \$12.500.

El precio del almuerzo en los diferentes restaurantes en los que se preguntó es el siguiente:

Costo del almuerzo

13.500	21.000	22.000	14.000	5.000
13.000	10.500	9.500	9.500	8.500
9.500	11.500	12.000	10.500	10.000
15.000	12.500	12.500	12.500	12.500

68. ¿El promedio de costo es correcto?
69. Si tú fueras el propietario de un nuevo restaurante en el centro de la ciudad, ¿entre qué valores pondrías el costo del almuerzo?

Justifica tu respuesta usando la media y la mediana de la muestra.

70. ¿Cuántos de los costos de los almuerzos están por debajo de la mediana?
71. ¿Cuántos de los costos de los almuerzos están por encima de la mediana?
72. Después de la investigación, se supo que los dos restaurantes en los cuales el almuerzo valía más de \$20.000, tenían ese día un menú especial y por eso el costo era distinto, así que se decidió sacarlos de la muestra. ¿Cambia el promedio calculado?



S Para la selección de un grupo de profesionales especializados en la publicidad y el diseño gráfico se tienen en cuenta varios aspectos:

- Publicaciones en marcas conocidas
- Concursos ganados
- Edad
- Experiencia en años

Cuando los candidatos han pasado el filtro de los dos primeros requisitos se examina su edad y su experiencia. A continuación se detallan los datos de los seleccionados, cada casilla de las dos tablas corresponde a los datos del mismo individuo:

Años de experiencia				
2	5	15	1	4
5	5	6	7	7
7	6	9	9	4
8	9	5	7	8
0	11	12	10	9
7	5	6	5	5

Edad				
24	25	40	25	28
29	28	27	27	35
35	34	41	42	33
28	35	25	29	32
20	42	40	39	32
35	33	33	34	34

73. Calcula el promedio de años de experiencia de los seleccionados.
74. Calcula el promedio de edad de los seleccionados.
75. Calcula la mediana en los dos conjuntos de datos.
76. Calcula la moda en los dos conjuntos de datos.
77. Si se descartan las personas que tengan menos años de experiencia que el promedio. ¿Cuántas personas se descartarán?
78. Reconstruye las dos tablas de datos teniendo en cuenta los aspirantes que aún quedan y sus respectivas edades.
79. Calcula el promedio en años de experiencia y determina si aumentó o disminuyó en relación con el promedio inicial.

P Determina un conjunto de cinco datos para los cuales se cumplan las condiciones que se indican en cada caso.

80. La media, la mediana y la moda sean iguales.
81. La media sea mayor que la mediana y que la moda.
82. La media, mediana y moda sean diferentes.

S Una empresa de turismo está haciendo una investigación sobre el dinero que invierte la gente de una ciudad en sus vacaciones de final de año.

Para ello, preguntó, por medio de encuesta telefónica, a 30 familias de estrato 4 de una ciudad central del país. Los datos se muestran a continuación:

Dinero para vacaciones		
1.600.000	3.200.000	3.700.000
2.500.000	2.900.000	3.200.000
1.800.000	2.500.000	3.100.000
1.500.000	2.000.000	2.700.000
1.000.000	1.950.000	2.550.000
1.950.000	2.100.000	2.200.000
2.100.000	2.300.000	1.950.000
3.000.000	2.950.000	2.850.000
2.900.000	2.000.000	1.650.000
3.100.000	3.200.000	1.550.000



83. En promedio, ¿cuánto dinero invierten las familias entrevistadas en su plan de vacaciones?
84. ¿Cuántas familias están por encima de este promedio?
85. Si la agencia planea proponer un plan de vacaciones todo incluido para cuatro personas por un valor de \$3.500.000, ¿qué resultados crees que obtendría entre el grupo de familias anteriores? Justifica tu respuesta.



3. Teoría de la probabilidad



Recurso
imprimible

El cálculo de probabilidades fundamenta la toma de decisiones en los experimentos aleatorios. A continuación se presentarán las leyes de la probabilidad y algunas técnicas para calcular probabilidades dadas ciertas condiciones específicas.

3.1 Probabilidad simple



Recurso
imprimible



Actividad

La probabilidad es una medida de incertidumbre que aporta información a la hora de tomar decisiones. Por ejemplo, si ha llovido durante los últimos días es probable que siga lloviendo, lo cual determinará que se cargue paraguas y se use ropa abrigada.

La probabilidad de ocurrencia de un evento está determinada por la siguiente expresión que se define a partir de un experimento aleatorio.

Dado un experimento aleatorio con un espacio muestral S y un evento A se dice que la **probabilidad de ocurrencia** de A , representada por $P(A)$ es el cociente entre el número de elementos del evento A , $\#(A)$, y el número de elementos del espacio muestral S , $\#(S)$, es decir, $mP(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$

EJEMPLO

Para la elección de los representantes del curso al concurso de poesía se han inscrito Mariana (M), Pablo (P), Daniela (D), Federico (F) y Juan (J). Todos tienen capacidades y aptitudes similares así que la profesora ha decidido hacer la elección de los dos participantes aleatoriamente. Determinar la probabilidad de que la pareja elegida sea la de Federico y Juan.

Sea A el evento que consiste en que Federico y Juan sean elegidos. Se pregunta por $P(A)$.

Primero, se deben encontrar los elementos del espacio muestral. Si los elegidos son dos entre el grupo de cinco, se puede decir que el espacio muestral está formado así:

$S = \{MP, MD, MF, MJ, PD, PF, PJ, DF, DJ, FJ\}$, luego $\#(S) = 10$.

Segundo, se halla el número de elementos del evento A .

Dentro del espacio muestral el evento A está formado por la pareja FJ , así que $\#(A) = 1$. Por tanto, se tiene que:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{1}{10}$$

Finalmente, se representa la probabilidad en forma de porcentaje. Para ello, se multiplica el decimal generado por 100. Así:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ y } 0,1 \times 100 = 10\%$$

Con lo cual se puede afirmar que Federico y Juan tienen un 10% de probabilidad de ser escogidos juntos para ir al concurso de poesía.

Si se quiere hallar la probabilidad de que Federico sea escogido, se define el evento B como esta situación y se busca la probabilidad de B . Para el caso sería:

$$P(B) = \frac{\#(B)}{\#(S)} = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$$



Recuerda que...

Si la probabilidad de ocurrencia de un evento es cero, se dice que este es el **evento imposible**.

Si la probabilidad de ocurrencia de un evento es uno, se dice que es un **evento seguro**.

3.2 Propiedades de la probabilidad

La probabilidad de ocurrencia de un evento cumple las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La probabilidad de ocurrencia de un evento siempre es un número entre 0 y 1.

La razón de esta propiedad se presenta ya que el número de elementos de un evento siempre es menor o igual al número de elementos del espacio muestral. Así, en símbolos se dice que dado A un evento dentro de un experimento aleatorio se tiene que,

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Propiedad 2. La probabilidad del evento imposible es 0 y se expresa así:

$$P(\phi) = 0$$

Propiedad 3. Si el evento definido es igual al espacio muestral su probabilidad es 1. En otras palabras, la probabilidad del evento seguro es 1 y se representa así:

$$P(S) = 1$$

Propiedad 4. Dado un evento A definido en un experimento aleatorio, se puede definir el evento A^c llamado el **evento complemento** de A . Se dice que la probabilidad de A y la probabilidad de A^c se relacionan de la siguiente manera:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

EJEMPLO

Martín (M), Sara (S), Jacobo (J) y Valentina (V) compiten para ganarse una beca y media beca. La selección se hará teniendo en cuenta los dos mejores puntajes en un examen de aptitud que presentarán; el mejor puntaje ganará la beca y el siguiente ganará la media beca. ¿Cuál es la probabilidad de que Jacobo gane la beca?

Primero, se determina el espacio muestral del experimento; este se forma con parejas teniendo en cuenta que es diferente estar de primero o estar de segundo, ya que el premio cambia según la posición. Así el espacio muestral será:

$$S = \{MS, MJ, MV, SJ, SV, JV, SM, JM, VM, JS, VS, VJ\}$$

De donde $\#(S) = 12$

Luego, se determina el número de elementos del evento C que consiste en que Jacobo gane la beca, esto es, las parejas ordenadas en las cuales Jacobo está de primero:

$$C = \{JV, JM, JS\}$$

De donde $\#(C) = 3$

Finalmente, se halla la probabilidad de que Jacobo gane la beca, así:

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\#(C)}{\#(S)} \\ &= \frac{3}{12} = 0,25 \quad 0,25 \times 100 = 25\% \end{aligned}$$

Por tanto, la probabilidad de que Jacobo gane la beca es del 25%.

Si se quisiera hallar la probabilidad de que Jacobo no gane la beca, se determina $P(C^c)$, así: $P(C^c) = 1 - P(C) = 1 - 0,25 = 0,75 = 75\%$.

Entonces, la probabilidad de que Jacobo no gane la beca es del 75%.



3.3 Principio de multiplicación



Ampliación
multimedia

Determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento es un ejercicio que tiene como requisito encontrar el espacio muestral del experimento en el cual está el evento en cuestión.

Para encontrar los elementos del espacio muestral de un experimento existen varias estrategias llamadas técnicas de conteo. En este libro se presenta una de ellas que se denomina **principio de multiplicación**.

Cuando en un experimento aleatorio se repite la misma acción dos o más veces y cada vez que sucede se puede obtener el mismo número de resultados entre sí, se puede aplicar el principio de multiplicación para encontrar el número de elementos del espacio muestral.

Este razonamiento debe llevar a pensar que en el experimento aleatorio que se realiza es importante el **orden** y se puede presentar que se **repitan** las opciones.

EJEMPLO

Una frutería ofrece dentro de su carta tres opciones de ensalada: tropical, baja en calorías y especial. Adicionalmente, a cada ensalada se le puede poner un adicional de queso que puede ser: campesino, mozzarella o doblecrema. Además, es posible ponerle miel o crema de leche.

El propietario de la frutería desea hacer una carta de precios detallando cada una de las posibilidades de ensaladas que tienen sus clientes. ¿Cuántas combinaciones distintas podrá hacer?

En este caso se debe tener en cuenta cuántos tipos de ensalada hay, con cuántos tipos de queso y cuántos tipos de salsa se les puede adicionar, así:

Tipos de ensalada	Tipos de queso	Tipo de salsa
3	3	2



Así que el número de posibles combinaciones es:

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

Las combinaciones de la carta se deben conformar de la siguiente manera:

Ensalada tropical, queso campesino, miel
 Ensalada tropical, queso campesino, crema de leche
 Ensalada tropical, queso mozzarella, miel
 Ensalada tropical, queso mozzarella, crema de leche
 Ensalada tropical, queso doble crema, miel
 Ensalada tropical, queso doble crema, crema de leche
 Ensalada baja en calorías, queso campesino, miel
 Ensalada baja en calorías, queso campesino, crema de leche
 Ensalada baja en calorías, queso mozzarella, miel
 Ensalada baja en calorías, queso mozzarella, crema de leche
 Ensalada baja en calorías, queso doble crema, miel
 Ensalada baja en calorías, queso doble crema, crema de leche
 Ensalada especial, queso campesino, miel
 Ensalada especial, queso campesino, crema de leche
 Ensalada especial, queso mozzarella, miel
 Ensalada especial, queso mozzarella, crema de leche
 Ensalada especial, queso doble crema, miel
 Ensalada especial, queso doble crema, crema de leche
 Luego, el propietario de la frutería puede combinar las ensaladas de frutas de 18 maneras diferentes.



Actividad

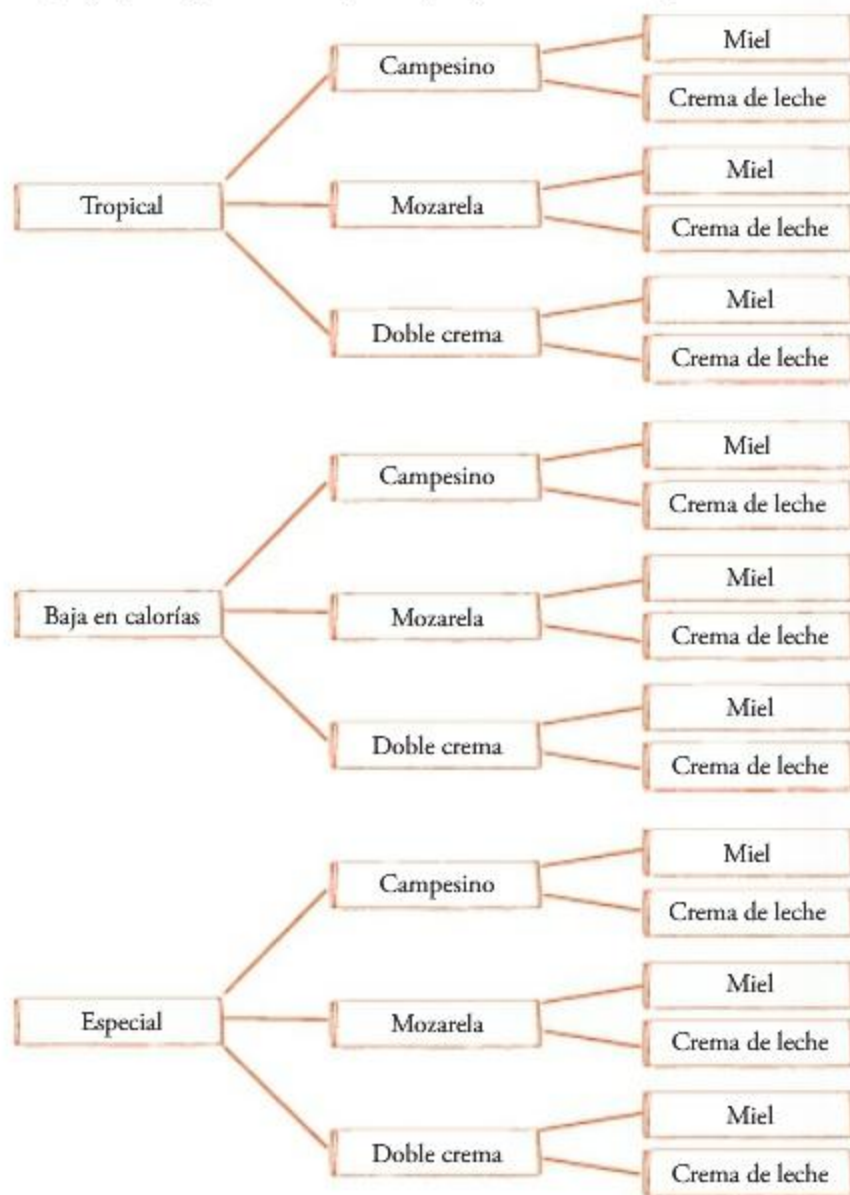


Ampliación
multimedia

El diagrama de árbol

El **diagrama de árbol** es una estrategia organizada que permite conocer, además del número de elementos del espacio muestral, cuáles son específicamente esos elementos. Este aspecto hace favorable encontrar la probabilidad de ocurrencia de algunos eventos específicos.

Por ejemplo, el diagrama de árbol para el ejemplo anterior es el siguiente:

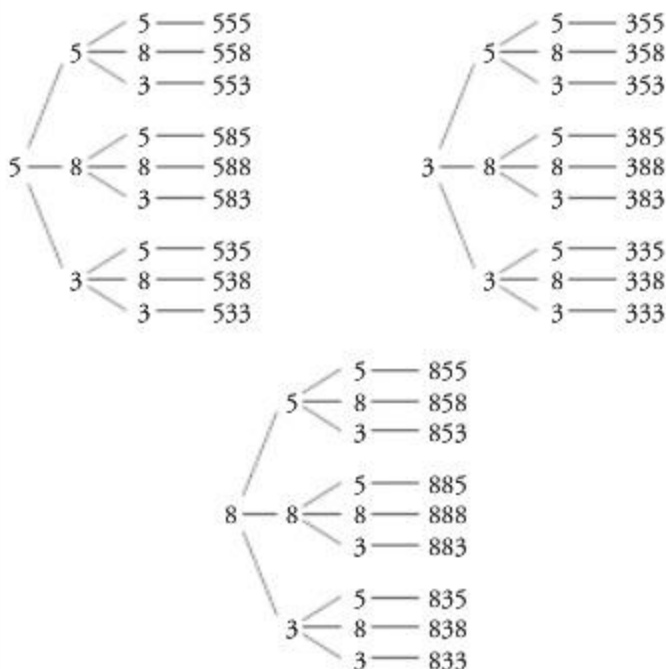


En el diagrama se puede observar que inicialmente se plantean tres ramas, de las cuales se desprenden nuevamente tres ramas más y, finalmente, de estas últimas se desprenden dos ramas finales. Cada una de las ramas determina un camino, al recorrer ese camino y escribir sus opciones, se generan las diferentes combinaciones que hay en el espacio muestral.

El profesor de matemáticas le ha dado a Sofía tres tarjetas para que forme números de tres dígitos:



Para solucionar la situación resulta útil dibujar el diagrama de árbol relacionado con ella. Así:



b. Si se escoge uno de los números al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este termine en cifra par?

En el diagrama de árbol se puede ver que esto sucede en 9 ocasiones, así que:

$$P(D) = \frac{\#(D)}{\#(S)} = \frac{9}{27} \approx 0,33 \qquad 0,33 \times 100 = 33\%$$

Luego, la probabilidad de que el número termine en cifra par es aproximadamente del 33%.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas • Argumento

- I** Un dado tiene numeradas sus seis caras con puntos del 1 al 6.



86. Escribe el espacio muestral del experimento que consiste en lanzar el dado.
87. Explica cómo hallarías la probabilidad de que el dado caiga en 6.
88. Halla la probabilidad de que caiga en un número par.
89. Responde, ¿la probabilidad de que caiga un número par es la misma que la probabilidad de que caiga un número impar? Justifica tu respuesta.

- E** Una bolsa contiene 3 bolas azules, 4 bolas rojas y 2 bolas verdes.

90. Escribe el espacio muestral del experimento que consiste en sacar una bola de la bolsa.
91. Determina la probabilidad de que al sacar una bola esta sea azul.
92. Halla la probabilidad de que la bola sacada sea verde.
93. ¿Cuál de los tres colores de bolas tiene menor probabilidad de salir? Explica tu respuesta.
94. ¿Qué condiciones se deberían cambiar en el experimento para que las probabilidades fueran iguales?

Supón que ahora el experimento consiste en sacar dos bolas de la bolsa.

95. Escribe los elementos del espacio muestral del nuevo experimento.
96. Determina la probabilidad de que las dos bolas que salgan sean del mismo color.
97. Determina la probabilidad de que las dos bolas sean rojas.
98. Halla la probabilidad de que las dos bolas sean verdes.
99. ¿Es válido afirmar que la probabilidad de seleccionar al menos una bola roja es de $\frac{13}{18}$?

- R** Laura y Pablo están jugando con dos monedas, una de 500 y otra de 200. Cada uno lanza una vez las monedas en su respectivo turno. Quien obtenga dos sellos gana \$100, quien obtenga un sello gana \$50 y quien obtenga dos caras no gana nada.

100. Escribe el espacio muestral de este experimento aleatorio.
101. Halla la probabilidad de que se ganen 100 pesos en un lanzamiento.
102. Determina la probabilidad de que se ganen 50 pesos en un lanzamiento.
103. ¿Cuál es la probabilidad de que no ganen dinero en un lanzamiento?
104. ¿Cuál es la probabilidad de que alguno gane por lo menos 50 pesos?
105. Si Pablo se ha ganado \$300 en menos de seis lanzamientos, ¿cuáles han sido los posibles resultados obtenidos?

- I** El profesor de la clase de estadística llevó una baraja de 52 cartas divididas en cuatro grupos (pintas). En el grupo de cartas hay 13 de picas, 13 de corazones, 13 de tréboles y 13 de diamantes. Cada una de estas trece cartas está numerada y dicha numeración va desde el 1 hasta el 10 y tres cartas más con las letras J, Q y K.

106. Halla la probabilidad de sacar una carta de tréboles.
107. Encuentra la probabilidad de sacar un 4 de cualquier pinta.
108. Determina la probabilidad de sacar una Q de cualquier pinta.
109. Halla la probabilidad de sacar un as de cualquier pinta.
110. ¿La probabilidad de sacar cualquier carta es la misma? Explica tu respuesta.





- Un turista desea programar su viaje de vacaciones a una reserva natural en la Amazonía colombiana. Al consultar en la agencia de viajes se da cuenta que para llegar a la reserva debe realizar tres recorridos: uno aéreo, uno terrestre y uno acuático.

La aerolínea correspondiente ofrece dos vuelos: uno matutino y otro vespertino.

La empresa encargada del transporte terrestre ofrece tres opciones: bus, colectivo o camioneta.

El encargado del transporte acuático cuenta con dos lanchas disponibles: una tradicional y una rápida.



111. Elabora el diagrama de árbol que te permita ver las opciones que tiene el turista.
112. ¿De cuántas formas diferentes puede viajar el turista?
113. ¿En cuántas de estas formas el recorrido terrestre es en colectivo?
114. Halla la probabilidad de que el turista viaje en el vuelo matutino.
115. Determina la probabilidad de que el turista vaya en lancha rápida.
116. Encuentra la probabilidad de que el turista no use bus en el tramo terrestre.
117. ¿Existe la misma probabilidad de ir en vuelo matutino que vespertino? Explica tu respuesta.
118. Si el turista definitivamente decide viajar en la mañana, ¿en qué cambiaría el diagrama de árbol que describe el nuevo espacio muestral?
119. Si el turista no viaja en lancha tradicional, ¿cambian las probabilidades? Justifica tu respuesta.
120. Elabora el diagrama de árbol que describe el espacio muestral del ejercicio anterior.

- Escribe una situación en la cual se obtenga lo indicado en cada caso.

121. La probabilidad de un evento es igual a 0,5.
122. La probabilidad de un evento es igual a 0,1.

- S** Mariana está organizando su clóset y ha encontrado que tiene muchas posibilidades de combinar sus atuendos. A continuación te presentamos un inventario de la ropa y los zapatos que tiene.

Camisetas	4
Jeans	3
Zapatos elegantes	4
Zapatos deportivos	5
Vestidos	6

123. Elabora el diagrama de árbol que muestra el número de posibilidades que tiene Mariana de combinar sus jeans, las camisetas y los zapatos deportivos.
124. Elabora un diagrama de árbol para saber las posibilidades que tiene Mariana de combinar sus vestidos y sus zapatos elegantes.
125. Si los zapatos deportivos son de los colores blanco, rojo, azul, morado y negro, ¿cuál es la probabilidad de que en su atuendo use zapatos rojos?
126. ¿Los diferentes pares de zapatos deportivos tienen la misma probabilidad de ser usados?

- R** Para elaborar un postre en el cual se requiere harina, queso, crema, fruta y azúcar, se dan las siguientes opciones:

Harina: de trigo o fécula de maíz

Queso: para untar o ricota

Crema: entera o baja en grasa

Fruta: fresa, banano o durazno

Azúcar: blanca o morena



127. ¿De cuántas maneras distintas se pueden usar los ingredientes para preparar el postre?
128. Si se decide hacer una mezcla de las tres frutas para incluirlas en el postre, hallar la probabilidad de que en su preparación se use azúcar blanca.



- Para la fiesta de cumpleaños de Sofia se ha contratado una empresa de recreación que ofrece todos los servicios. A continuación se presenta su *brochure*.



129. ¿De cuántas maneras diferentes se puede programar la fiesta si se elige una opción de cada parte del *brochure*?
130. Determina la probabilidad de que la decoración sea de hadas y la torta de tres leches.
131. ¿Cuál es la probabilidad de que la recreación esté a cargo de un cuentero, que la comida sea perro caliente y que la bebida sea gaseosa?
132. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya payasos en la fiesta?
- S Para formar el equipo de séptimo que participará en las olimpiadas de matemáticas se inscribieron seis candidatos: Andrés, Miguel, Isabela, Tatiana, Alejandra y Camilo. Para la olimpiada solo pueden clasificar dos personas y se sabe que todos los competidores tienen la misma capacidad, así que la elección se hará de manera aleatoria.
133. Determina la probabilidad de que Andrés esté entre los elegidos.
134. Encuentra la probabilidad de que las dos elegidas sean mujeres.
135. Halla la probabilidad de que sean elegidos un hombre y una mujer.

- S Para la inauguración de los juegos intercurios, cada salón debe diseñar una bandera que los represente. La bandera debe tener tres franjas de igual medida y de diferente color. Los colores propuestos para hacer las banderas son: rojo, azul, blanco y verde.



136. ¿Cuántas banderas se podrán diseñar si se consideran diferentes los modelos con franjas verticales y los modelos con franjas horizontales?
137. Representa en un diagrama de árbol las diferentes posibilidades de diseñar las banderas.
138. ¿Cuántas banderas diferentes se podrán diseñar si dos banderas no pueden tener los mismos colores así estén en diferente orden?

Determina la probabilidad de que la bandera tenga:

139. El color verde.
140. Los colores blanco y verde.
141. Los colores blanco, verde y rojo.
142. Los colores rojo, azul y blanco.
143. Los colores azul, blanco, verde.
144. Tenga todos los colores.
- S Ana va a comprar una USB. En el almacén venden USB de colores rojo, azul y verde y de capacidades 2 gigas, 4 gigas y 8 gigas.



145. ¿De cuántas formas distintas puede elegir las?
146. ¿Cuál es la probabilidad de que elija una USB de color azul y con capacidad de 4 gigas?
147. ¿Cuál es la probabilidad de que elija una USB de color rojo?



4. Caracterización de datos y probabilidad

Cuando se hace un estudio de datos, con regularidad lo que se pretende es analizar las variables involucradas y tomar decisiones que mejoren aspectos en la muestra o población estudiadas.

Es aquí donde cobra sentido hablar de la inferencia estadística y aunque esta es una parte muy avanzada y complicada de la teoría de la probabilidad, en esta unidad se presentan algunas relaciones sencillas entre la caracterización de variables y la probabilidad de ocurrencia de un evento.

4.1 Probabilidad y frecuencia relativa

Cuando se elabora una tabla de frecuencias para caracterizar una variable es conveniente tener en cuenta la definición de frecuencia relativa.

La frecuencia relativa es la relación, por medio de un cociente de la frecuencia y el total de la muestra o población: $fr = \frac{f}{n}$

Así, si analizamos esta expresión en el campo de la probabilidad se puede analizar que:

$$\frac{f}{n} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

Con lo cual, la frecuencia relativa es una **probabilidad de ocurrencia**. Es importante anotar que si la frecuencia relativa es una probabilidad, la columna del porcentaje en una tabla de frecuencias es otra forma de escribir dicha probabilidad.

EJEMPLOS

Una comercializadora de productos de belleza planea sacar al mercado una nueva línea de pintura para uñas. Para asegurarse de que su producto tendrá acogida entre los estilistas, preguntó a un grupo de ellos si compraría o no el producto y cuántas unidades de los diferentes colores ofrecidos compraría para sus salas de belleza. La información se presenta a continuación:

¿Compraría el producto?

Sí	74
No	29
Tal vez	9

¿Cuántas unidades compraría?

Entre 0 y 5	21
Entre 6 y 11	37
Entre 12 y 17	15
Entre 18 y 23	10



- a. Elaborar una tabla de frecuencias para la variable cualitativa y escribir dos conclusiones relacionadas con probabilidad.

La variable cualitativa en este caso es ¿compraría el producto? Luego su tabla de frecuencias es:

Clase	f	fr	F	Fr	%
Sí	74	$\frac{74}{112}$	74	$\frac{74}{112}$	66,07
No	29	$\frac{29}{112}$	103	$\frac{103}{112}$	25,89
Tal vez	9	$\frac{9}{112}$	112	$\frac{112}{112}$	8,04
Total	112	1			100

De esta tabla de frecuencias se puede concluir que la probabilidad de que los estilistas compren el producto es aproximadamente del 66% y que aún hay un 8% de la muestra que probablemente lo comprará.



- b. Construir la tabla de frecuencias para la variable cuantitativa y escribir dos conclusiones relacionadas con la probabilidad.

Intervalo	f	fr	F	Fr	%
[0, 5]	21	$\frac{21}{83}$	21	$\frac{21}{83}$	25,30
[6, 11]	37	$\frac{37}{83}$	58	$\frac{58}{83}$	44,58
[12, 17]	15	$\frac{15}{83}$	73	$\frac{73}{83}$	18,07
[18, 23]	10	$\frac{10}{83}$	83	$\frac{83}{83}$	12,05
Total	83	1			100

De la tabla se puede concluir que el 44,58% de los estilistas que respondieron Sí o Tal vez comprarían entre 6 y 11 unidades de pintura para uñas.

Matemáticamente

- ¿Qué es una tabla de contingencia?
- ¿Cómo se construye una tabla de contingencia?

4.2 Probabilidad y tablas marginales

Cuando se hace la caracterización de dos variables cualitativas se acostumbra presentar la información en una **tabla cruzada** o **tabla de contingencia**. Cuando en dicha tabla de contingencia, se escriben las frecuencias relativas se está hablando de probabilidades. Esta nueva tabla que se genera recibe el nombre de tabla marginal o tabla de probabilidades marginales.

EJEMPLOS

1. El departamento de mercadotecnia de una prestigiosa clínica de belleza realizó un estudio en el cual se le preguntó a 124 mujeres de estratos 4 y 5 si se practicarían una cirugía estética y qué tipo de intervención les llama más la atención. Los resultados se muestran en la siguiente tabla marginal:

	Liposucción	Abdominoplastia	Rinoplastia	Mamoplastia
Sí	$\frac{37}{124}$	$\frac{14}{124}$	$\frac{17}{124}$	$\frac{16}{124}$
No	$\frac{15}{124}$	$\frac{4}{124}$	$\frac{8}{124}$	$\frac{13}{124}$

Escribir conclusiones a partir de los datos organizados en ella.

Cuando se elabora la tabla marginal y se ponen en porcentajes estas frecuencias se puede concluir que en la muestra tomada:

- Es probable que las personas encuestadas se quieran practicar una cirugía estética pues el 67,74% de las encuestadas respondió que Sí.
- Es probable que el 29,83% de las mujeres encuestadas sí se practiquen una liposucción.
- Dentro de la muestra los otros tres tipos de cirugía tienen probabilidades similares siendo la probabilidad de practicarse una abdominoplastia 11,29%, la de practicarse una rinoplastia 13,7% y la de practicarse una mamoplastia 12,9%.



2. Con la finalidad de estimar la producción de 1.500 vehículos para el año siguiente, una compañía automotriz encuestó a 200 personas de diferentes partes del país, con relación al vehículo de su preferencia. Los resultados se muestran a continuación.

	Sedán	Cupé	4 × 4	Total
Hombres	55	19	31	105
Mujeres	37	46	12	95
Total	92	65	43	200

La empresa rifará un bono de descuento para la compra de un vehículo último modelo entre los 200 participantes. Hallar la probabilidad de que:

El ganador sea un hombre que le guste un vehículo 4 × 4.

Quien obtenga el bono sea mujer.

Quien gane sea una mujer que le guste un vehículo cupé.

El ganador sea un hombre que no le guste un vehículo sedán.

Primero, para solucionar la situación, es posible definir los siguientes eventos para las personas seleccionadas:

A: Hombre que le gustan los 4 × 4

C: Mujer que le gusta el cupé

B: Mujer

D: Hombre que no le gusta el sedán

Luego, con esta información y poniendo la tabla como una tabla marginal se tiene que:

	Sedán	Cupé	4 × 4		Sedán	Cupé	4 × 4
Hombres	$\frac{55}{200}$	$\frac{19}{200}$	$\frac{31}{200}$	Hombres	27,50%	9,50%	15,50%
Mujeres	$\frac{37}{200}$	$\frac{46}{200}$	$\frac{12}{200}$	Mujeres	18,5%	23%	6%

- Hay 31 hombres que prefieren el vehículo 4 × 4, por tanto,

$$P(A) = \frac{31}{200} = 0,155 \quad 0,155 \times 100 = 15,5\%$$

- En el grupo fueron 95 las mujeres encuestadas, así que:

$$P(B) = \frac{95}{200} = 0,475 \quad 0,475 \times 100 = 47,5\%$$

- Hay 46 mujeres que prefieren el vehículo cupé, entonces:

$$P(C) = \frac{46}{200} = 0,23 \quad 0,23 \times 100 = 23\%$$

- Hay 50 hombres que no prefieren el sedán (son los que prefieren el cupé y la 4 × 4), así que:

$$P(D) = \frac{50}{200} = 0,25 \quad 0,25 \times 100 = 25\%$$

Finalmente, la probabilidad de que el ganador sea un hombre que le gusta el vehículo 4 × 4 es del 15,5%, la probabilidad de que el ganador sea mujer es del 47,5%, la probabilidad de que el ganador sea una mujer que le gusta el cupé es del 23% y la probabilidad de que el ganador sea un hombre que no prefiera un vehículo sedán es del 25%.





Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • **E** Ejercito • **R** Razono • **S** Soluciono problemas

- I** Una prestigiosa universidad de la ciudad realizó una reunión de inducción a 500 jóvenes de grado 11. La idea era conocer cuál era la inclinación profesional de los estudiantes y poder ofrecerles sus servicios educativos.

Los resultados se registraron en la siguiente tabla:

I: ingenierías, H: humanidades, N: negocios

	I	H	N	Total
Hombres	120	45	100	265
Mujeres	50	110	75	235
Total	170	155	175	500



La universidad rifará una beca entre los 500 participantes.

148. Explica cómo puedes determinar la probabilidad de que la beca la gane un hombre que quiera estudiar negocios. Luego, hálala.
149. Indica los pasos para hallar la probabilidad de que la beca la gane una mujer que quiera estudiar ingeniería.
150. Encuentra la probabilidad de que la beca la obtenga un hombre que quiera estudiar humanidades.
151. Responde, ¿cuál es la probabilidad de que la beca la gane una mujer que no quiera estudiar negocios?
152. Define tres eventos diferentes a los planteados en los numerales anteriores.
153. Determina la probabilidad de ocurrencia de esos eventos que definiste.

- E** El departamento de epidemiología de un hospital ha emprendido un estudio sobre diferentes enfermedades respiratorias que se incrementan en las temporadas invernales en una ciudad.

Para ello, tomó una muestra de pacientes que asistieron a la sección de urgencias de dicho hospital y les preguntó qué afecciones respiratorias habían padecido. Los resultados se muestran a continuación:

gripa	bronquitis
asma	neumonía
neumonía	gripa
neumonía	bronconeumonía
asma	bronconeumonía
neumonía	asma
asma	neumonía
bronconeumonía	neumonía
neumonía	gripa
asma	bronconeumonía
gripa	bronconeumonía
bronquitis	bronquitis
neumonía	bronquitis
bronquitis	bronquitis

154. Elabora la tabla de distribución de frecuencias correspondiente a la información del hospital.
155. Dibuja el histograma correspondiente a la situación planteada.
156. Determina la probabilidad de que, al seleccionar un paciente al azar, este haya padecido bronquitis.
157. Encuentra la probabilidad de que, al seleccionar un paciente, este haya padecido neumonía.
158. ¿Cuál de las enfermedades es la que tiene la mayor probabilidad?
159. ¿Cuál de las enfermedades es la que tiene menor probabilidad?
160. Si el hospital planea emprender una campaña de información sobre los síntomas iniciales de las enfermedades respiratorias, ¿con cuál enfermedad debería empezar?



- R** El encargado de realizar las compras de la dotación de calzado para una empresa manufacturera lleva el siguiente registro:

Talla	34	35	36	37	38	39	40	41	42
Cantidad de personas	18	72	155	302	225	156	48	19	5

Se sabe que estos 1.000 pares de botas no serán suficientes, así que se decidió hacer un pedido de 200 pares más.

- 161.** Determina, usando probabilidades, cuántos pares de cada número se deben comprar.

- S** El gobierno escolar es una figura que, desde el trabajo en la democracia, se ha instaurado en las instituciones educativas del país. Al inicio de cada año escolar, varios estudiantes del grado undécimo se postulan para asumir el cargo de personero estudiantil; además en cada uno de los grados se elige un representante al consejo estudiantil que será liderado por el personero elegido por todos los estudiantes.

En un colegio de la ciudad, los postulados para el cargo de personero son: Camilo, Adriana y Salomé. Un grupo de estudiantes aplicó una encuesta inicial a 120 de sus compañeros de todos los grados y encontraron la siguiente intensidad de voto:

Adriana	36 votos
Salomé	30 votos
Camilo	54 votos

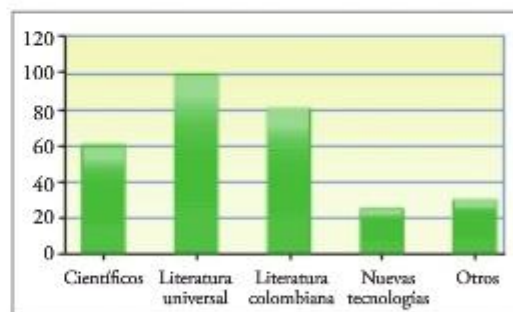


Se sabe que la encuesta seleccionó aleatoriamente a los 120 encuestados y que además en el colegio hay 600 estudiantes.

- 162.** Teniendo en cuenta esta información, ¿cuál será la cantidad esperada de votos por Camilo?
- 163.** ¿Cuál será la cantidad esperada de votos por Adriana?

- S** La bibliotecóloga del colegio está proyectando la compra de 1.000 nuevos ejemplares de libros para mejorar la biblioteca.

Tiene como información los registros de préstamos del último mes, los cuales se detallan en la siguiente gráfica:



- 164.** ¿Cuántos textos de literatura universal debería comprar?
- 165.** ¿Cuántos textos de literatura colombiana debería comprar?
- 166.** ¿Cuántos textos de nuevas tecnologías debería comprar?
- 167.** ¿Qué significa la opción "otros" en este contexto? ¿Cuántos libros, en esta opción, debería comprar?

- S** La tabla muestra los resultados de 200 lanzamientos de un dado normal.



Número	f_i	f_r
1	40	0,2
2	50	0,25
3	10	0,05
4	20	0,1
5	60	0,3
6	20	0,1
Total	200	1

- 168.** ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el número 5?
- 169.** ¿Cuál es la probabilidad de que no salga un número menor o igual que 3?



Caracterización de variables cuantitativas

- Una importante revista científica está interesada en incrementar su público lector. Para determinar entre qué edades están sus lectores, aplicó una encuesta en varios de los puntos de venta en los cuales se distribuye su publicación.

Los resultados se muestran a continuación:

18	23	18	25	32	37	49
19	26	28	29	31	33	30
40	21	26	22	24	35	37
19	27	26	28	36	33	31
31	32	34	45	39	20	19

170. Completa el diagrama de tallo y hojas relacionado con la situación:

Tallo	Hojas
1	
2	
3	
4	

171. Determina cuál es la clase modal para esta situación: _____

172. Escribe dos conclusiones a partir del diagrama.

Conclusión 1: _____

Conclusión 2: _____

- Los siguientes datos fueron recogidos por una empresa farmacéutica especialista en la elaboración y distribución de analgésicos para los síntomas de la gripa. La pregunta que se le hizo a cada persona fue: ¿Cuántas veces compra, en un mes, productos para disminuir los síntomas de la gripa común?

1	1	5	7	2	5	3	5
1	6	6	8	9	2	4	3
3	6	7	5	4	9	8	1
0	0	2	1	5	7	2	9
6	7	6	3	3	2	1	1
0	8	9	7	8	7	9	5
9	9	7	5	6	6	4	1

173. El rango de los datos es: _____

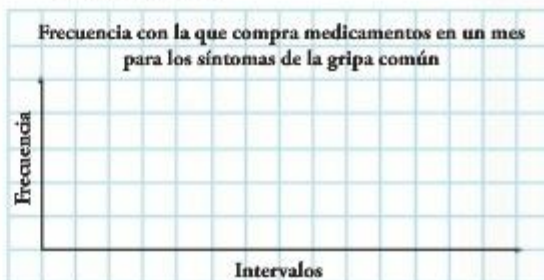
174. El número de intervalos que se generan en esta distribución es: _____

175. El tamaño de cada intervalo es: _____

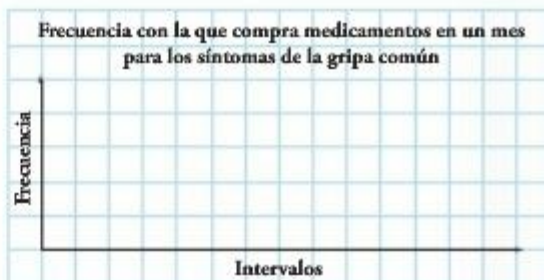
176. Completa la tabla de distribución de frecuencias correspondiente.

Intervalos	f	fr	F	Fr	%	M_i

177. Elabora el histograma correspondiente a la distribución; sobre dicho histograma dibuja el polígono respectivo.



178. Elabora el histograma con las frecuencias acumuladas y sobre él dibuja la ojiva correspondiente.



179. Escribe dos conclusiones a partir de los datos.

- Un productor de insumos para modistería desea conocer las cantidades que compran semanalmente su clientes. Para tal fin, la semana pasada decidió registrar estas cantidades. Los resultados se muestran a continuación:

Cremalleras

30	35	43	12	67	45	67	89
56	78	65	43	98	76	43	21
54	67	68	98	56	45	78	87
53	43	42	40	75	64	54	32
34	77	87	65	43	56	57	87

Botones

102	134	234	213	321	213	211	100
102	132	213	200	123	110	120	320
104	102	104	110	120	130	124	120
300	302	230	232	234	238	300	128
224	2.268	260	240	120	190	180	100

Hilos

56	58	59	78	79	98	70	95
67	89	84	56	34	98	90	70
80	60	80	70	77	88	99	50
55	44	43	23	65	76	87	69
56	48	87	76	77	54	34	23

Determina el promedio indicado.

180. Cremalleras: _____
181. Botones: _____
182. Hilos: _____
183. Establece el valor de la mediana para cada uno de los insumos.
 Mediana de cremalleras: _____
 Mediana de botones: _____
 Mediana de hilos: _____
184. Especifica, si existe, la moda para cada insumo.
 Moda de cremalleras: _____
 Moda de botones: _____
 Moda de hilos: _____
185. Teniendo en cuenta los estadísticos anteriores, escribe dos conclusiones relacionadas con estas bases de datos.

Teoría de la probabilidad

- En un salón se reunieron las siguientes personas:

Seis hombres menores de 20 años, cinco hombres mayores de 20 años, tres mujeres mayores de 20 años y siete mujeres menores de 20 años.

Se definen los siguientes eventos:

A: Hombre menor de 20 años.

B: Hombre mayor de 20 años.

C: Mujer mayor de 20 años.

D: Mujer menor de 20 años.

186. Halla la probabilidad de elegir un hombre.

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

187. Encuentra la probabilidad de elegir una mujer.

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

188. Halla la probabilidad de elegir un hombre o una mujer menor de 20 años.

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

189. Halla la probabilidad de elegir un hombre o una mujer mayor de 20 años.

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

- El profesor de educación física preguntó a sus estudiantes sobre el tiempo que dedican a hacer deporte entre semana. Los resultados se presentan a continuación:

	Hombre	Mujer
Menos de 1 hora	12	25
Entre 1 y 2 horas	25	10
Más de 2 horas	5	8

Si se selecciona al azar un estudiante:

190. La probabilidad de que sea hombre es:

$$P = \underline{\hspace{2cm}}$$

191. La probabilidad de que practique entre 1 y 2 horas es: $P = \underline{\hspace{2cm}}$

192. La probabilidad de que practique menos de 2 horas es: $P = \underline{\hspace{2cm}}$

193. La probabilidad de que sea mujer y practique más de 2 horas es: $P = \underline{\hspace{2cm}}$



PROBLEMAS PARA REPASAR

En un parque de diversiones se piensa poner en funcionamiento un nuevo juego en el cual se debe limitar el ingreso a personas que sobrepasen cierto peso. Para optimizar las características del juego y permitir el ingreso a la mayor cantidad de público, el fabricante ha decidido hacer una prueba con 50 personas. A partir de allí, planea determinar las condiciones de peso para el ingreso al juego. Los pesos, en kilos, de las personas se relacionan a continuación:



55 58 69 87 88 57 68 63 65 58 88 59 65 80 54 76 87 55 56 66 65 62 66 87 55
83 58 56 87 88 75 74 61 45 69 71 88 57 55 63 64 63 69 59 57 59 84 55 54 54

Determinar cuál es el peso promedio de la muestra y analizar cuántas personas están ubicadas en la clase a la cual pertenece dicho promedio.

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el peso promedio? ¿Cuántas personas de la muestra están cerca al promedio?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se muestran los pesos de 50 personas que conforman una muestra para el estudio de condiciones de peso en un juego.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se suman los pesos de las 50 personas y se divide entre el total de datos, que en este caso es 50, para hallar el promedio: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3.337}{50} = 66,74$ kilos.

Luego, se elabora una tabla de distribución de frecuencias así:

Clase	f	fr	F	Fr	%	M_i
45-51	1	$\frac{1}{50}$	1	$\frac{1}{50}$	2	48
52-58	16	$\frac{16}{50}$	17	$\frac{17}{50}$	32	55
59-65	12	$\frac{12}{50}$	29	$\frac{29}{50}$	24	62
66-72	7	$\frac{7}{50}$	36	$\frac{36}{50}$	14	69
73-79	3	$\frac{3}{50}$	39	$\frac{39}{50}$	6	76
80-86	3	$\frac{3}{50}$	42	$\frac{42}{50}$	6	83
87-93	8	$\frac{8}{50}$	50	$\frac{50}{50}$	16	90

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

La media está en el intervalo 66-72; en él hay 7 personas, con lo cual es posible decir que 7 personas tienen pesos muy cercanos al promedio.

Realiza lo indicado en los numerales 194 a 198, a partir de la siguiente información.

El propietario de una gran hacienda desea recubrir la cerca que rodea su propiedad con plantas ornamentales. Para ello, quiere determinar el promedio de altura de las plantas con las que iniciará el cultivo alrededor de la hacienda. La información que le brindan sus empleados se presenta a continuación:

Altura de las plantas en centímetros

145	156	187	156	189
154	143	176	177	176
159	176	175	178	179
169	167	178	176	179



194. Calcula el promedio de altura de las plantas.

195. Determina la mediana de la muestra.

196. ¿Qué alturas están por debajo de la mediana?

197. ¿Qué alturas están por encima de la mediana?

198. Escribe algunas conclusiones sobre las alturas de las plantas.

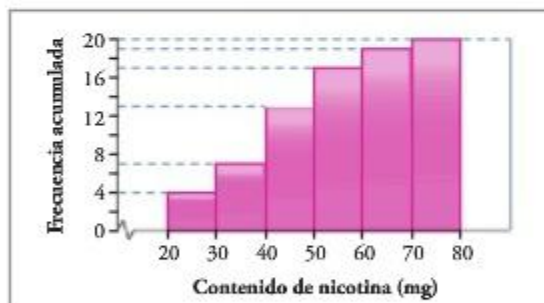
A continuación se registran los datos de la vida útil de la batería de varios dispositivos MP4: Esta vida se calcula teniendo en cuenta el número de cargas:

1.110	1.050	1.025	1.230	1.024
1.120	1.022	1.000	1.033	1.320
1.236	1.256	1.423	1.205	1.000
1.142	1.236	1.542	1.625	1.236
1.023	1.006	1.450	1.250	1.400

199. ¿Cuál es el promedio de número de cargas para la vida útil de los dispositivos MP4?

Lee la siguiente información. Luego, responde las preguntas 200 y 201.

Se analizó el contenido de nicotina, sustancia probada científicamente como cancerígena, en una muestra de 20 cigarrillos de diferente tipo. Solo se dispone de este histograma de frecuencias acumuladas.

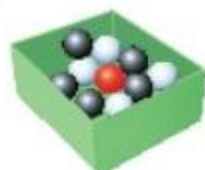


200. ¿Cuál es la probabilidad de que un cigarrillo de la muestra contenga menos de 30 mg de nicotina?

201. Si un cigarrillo contiene menos de 50 mg de nicotina, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al intervalo menos cancerígeno?

Responde las preguntas 202 a 205, después de leer lo siguiente:

Una caja contiene cuatro bolas blancas, una roja y cinco negras. Sea el experimento: sacar una bola al azar.



Halla la probabilidad de los sucesos que se mencionan a continuación:

202. A: Sacar bola blanca.

203. B: Sacar bola roja.

204. C: Sacar bola que no sea negra.

205. D: Sacar bola blanca o negra.

...Para desarrollar análisis en biología.



Galería de imágenes

La **bioestadística** es la rama de la estadística que se dedica a las aplicaciones de esta ciencia en el área biológica. Es decir, en campos tan diversos como la medicina, las ciencias agropecuarias y las ciencias forestales.

Más que la aplicación de técnicas estadísticas, la bioestadística es una disciplina en sí y su campo se encuentra en constante evolución y desarrollo, lo que permite contestar preguntas claves de la investigación en salud.

La estrecha relación de la estadística con el método científico hace de la bioestadística una disciplina imprescindible en la mayoría de los proyectos en el área tecnológica.

El pensamiento estadístico no sólo resuelve y entiende la compleja metodología para dar respuesta a una hipótesis, sino que es capaz de organizar el "sistema" que involucra la investigación desde el diseño general, diseño de muestreo, control de calidad de la información, análisis y presentación de resultados.



El papel del bioestadístico, en la planificación y desarrollo de proyectos de investigación en estas áreas, no solo es fundamental para el proyecto en sí, sino que enriquece y potencia la investigación significativamente.

La colaboración de los bioestadísticos ha sido clave en el desarrollo de nuevos fármacos y en el entendimiento de enfermedades crónicas como el cáncer y el sida.

Se observa cómo las personas que se especializan en la producción animal utilizan las técnicas de bioestadística para maximizar rendimientos minimizando costos y manteniendo las especies en muy buenas condiciones.



Pero en muchos casos no se tiene el tiempo ni los recursos suficientes para llevar a cabo una evaluación del total de las observaciones potenciales. Por tales motivos, dichas personas (agrónomos, zootecnistas, veterinarios, entre otros) deciden usar sólo una muestra, para evaluar el comportamiento de los animales en general; esto es, a partir de información parcial o incompleta efectúan una estimación e infieren sobre el rendimiento promedio. Esto requiere del conocimiento de técnicas estadísticas inferenciales.

Por ejemplo, un investigador de nutrición animal interesado en conocer la ganancia diaria de peso (GDP) alcanzada por los bovinos en una granja engordadora que utiliza la información de solo 8 de los 59 animales disponibles, esto es de una muestra de la población de interés, obtiene los siguientes resultados (en kg):

0,950	0,900	1,040	0,780
0,840	0,925	0,860	0,945

1. ¿Cuál es el promedio de la ganancia de peso de los animales?

El mismo investigador toma otra muestra similar y determina que el promedio de peso es de 0,868.

2. ¿Cuánto es la diferencia de promedio de las dos muestras?
3. ¿A qué aspectos puede obedecer dicha diferencia?
4. ¿Qué interpretación puedes hacer de los promedios en esta situación específica?

5. A continuación se presentan los datos de 7 de los animales cuyo promedio fue 0,868. Determina el dato del octavo animal:

0,870	0,840	0,800	0,860
0,900	0,879	0,850	

...También sirve para desarrollar investigaciones en genética.

La genética estudia la distribución de los genes en las poblaciones, así como los factores que mantienen o cambian de una generación a otra. Los seres humanos tenemos 46 cromosomas (22 pares no sexuales y 2 cromosomas sexuales que en las mujeres son XX y en los hombres XY).

Mendel, un monje australiano, planteó que en la herencia genética cada característica está determinada por dos factores llamados genes: uno está dado por la madre y otro por el padre.

Los **alelos** son las formas alternativas de los genes. Si un individuo posee los dos alelos idénticos para un mismo carácter se llama **homocigótico** y si son diferentes se llama **híbrido**.

Si un alelo impide manifestarse a otro, recibe el nombre de **dominante**; el alelo no dominante se denomina **recesivo**.



Observa algunos ejemplos de caracteres dominantes y recesivos en los seres humanos a continuación:

Genes determinantes de enfermedades o malformaciones

Dominantes	Recesivos
Enanismo	Estructura normal
Braquidactilia	Dedos normales
Corea de Huntington	Sin Corea de Huntington
Pigmentación normal	Albinismo
Coagulación normal de sangre	Hemofilia
Visión normal	Daltonismo
Oído normal	Sordera
Polidactilia	No. normal de dedos
Visión normal	Ceguera para colores

Genes determinantes de caracteres triviales

Dominantes	Recesivos
Lengua enrollable RH ⁺	Lengua no enrollable RH ⁻
Pelo rizado	Pelo liso
Cabello oscuro	Cabello claro
Ojos oscuros	Ojos claros
Labios gruesos	Labios finos
Pestañas largas	Pestañas cortas
Oreja con lóbulo	Oreja sin lóbulo
Grupos sanguíneos A y B	Grupo sanguíneo O

Cada una de las personas posee en su material genético la información correspondiente a las características que se heredan de los padres. Por ejemplo, el color de los ojos: claros u oscuros.

El factor ojos oscuros domina el factor ojos claros, es decir, una persona tiene en su información genética dos genes: uno de ojos claros y otro de ojos oscuros.

1. Para calcular la probabilidad de que una persona de ojos oscuros y otra de ojos claros tengan hijos de ojos oscuros, se plantea el siguiente esquema en el que *O* simboliza el gen para ojos oscuros y *C* simboliza el gen para ojos claros. Complétalo.

	C	C
O		
O		



2. Como el nuevo individuo ya tiene en su información genética los caracteres de ojos claros y oscuros, la segunda opción será dada por la siguiente tabla. Complétala.

	C	C
O		
C		

3. Determina dos eventos diferentes en cada tabla y calcula sus probabilidades.

Trabaja con Excel

Objetivo: calcular las medidas de tendencia central como la media, mediana y moda en la solución de problemas cotidianos.

Descripción: dada la variable x : pesos (en kilogramos) de todos los cerdos de un criadero en engorde de una empresa procesadora de carnes cuyos datos corresponden a 4, 20, 10, 10, 6, 8, 12, 16, 4, 10, calcular media, mediana y moda, utilizando Excel.

1 Haz clic en inicio programas y luego Microsoft Excel.

2 Digita en la primera fila los datos del ejercicio, así:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	4	20	10	10	6	8	12	16	4	10

3 Digita en celdas independientes los datos que se van a hallar: media, mediana y moda como se ve en la siguiente imagen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	4	20	10	10	6	8	12	16	4	10	
2											Media
3											Mediana
4											Moda

4 Selecciona la celda que está frente a la palabra media (la celda debe quedar resaltada en color negro), como se ve a continuación:

H	I	J	K	L	M
16	4	10			
			Media		
			Mediana		

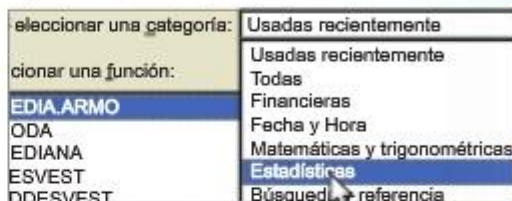
5 Observa la parte superior de la barra de menú. Luego, haz clic en la pestaña **Fórmulas**, como se muestra a continuación.



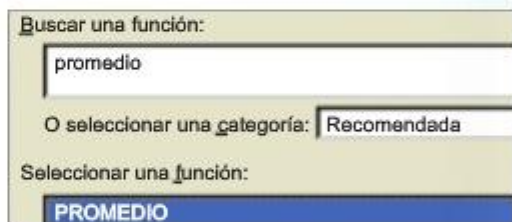
6 En la parte superior izquierda, haz clic sobre el botón **Insertar función**.



7 En la ventana que se ve se despliega un menú. En el menú desplegable haz clic en la parte que dice seleccionar una categoría. Luego, activa la opción **Estadísticas**.



8 En el cuadro en blanco, parte superior, escribe la palabra media y luego presiona la tecla **Enter**. Y en el espacio **Seleccionar una función** haz clic sobre la opción **PROMEDIO** como se ve en la imagen. Luego, presiona clic en **Aceptar**.



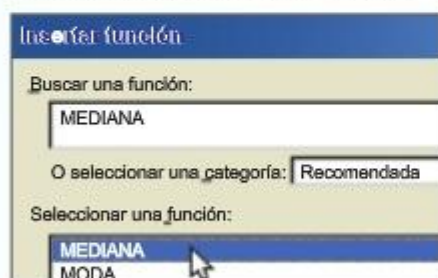
9 En la ventana que se despliega en el cuadro de texto **Número 1** digite **a1:j1** (celdas del dato inicial y dato final) luego haz clic en **Aceptar**.



10 El resultado debe quedar frente de la celda que indica la Media como se puede ver en la siguiente imagen.

H	I	J	K	L
16	4	10		
			Media	10
			Mediana	
			Moda	

- 11 Repite nuevamente los pasos 5 a 7.
- 12 Escribe mediana en el cuadro en blanco de la parte superior y presiona la tecla **Enter**. En el cuadro que tiene la opción **Seleccionar una función** haz clic sobre **MEDIANA** como se ve en la imagen. Luego, haz clic en **Aceptar**.



- 13 En la ventana que se despliega en el cuadro de texto **Número 1** digita **a1:j1** (o selecciona las celdas de los datos). Luego, haz clic en **Aceptar**.



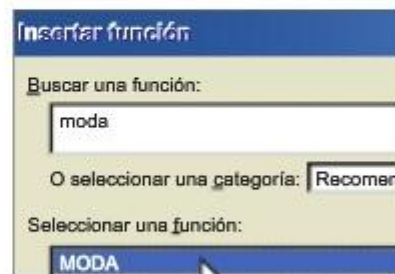
- 14 El resultado debe quedar frente de la celda **Media** como se puede ver en la siguiente imagen.

F	G	H	I	J	K	L
8	12	16	4	10		
					Media	10
					Mediana	10
					Moda	

- 15 Para calcular el valor de la moda, selecciona la celda ubicada frente a la palabra **Moda**, así:

F	G	H	I	J	K	L
8	12	16	4	10		
					Media	10
					Mediana	10
					Moda	

- 16 Repite los pasos 5 al 7.
- 17 Escribe moda en el cuadro en blanco, parte superior, y tecla **Enter**. En **Seleccionar una función** haz clic sobre **MODA** como se ve en la imagen. Luego, haz clic en **Aceptar**.



- 18 En la ventana que se despliega en el cuadro de texto **Número 1** digite **a1:j1** (o selecciona las celdas que contienen los datos). Luego, haz clic en **Aceptar**.



- 19 El resultado debe quedar frente de la celda **Moda** como se puede ver en la siguiente imagen.

Media	10
Mediana	10
Moda	10

- 20 Calcula, usando Excel, la media, la mediana y la moda para el siguiente conjunto de datos, que corresponden a las estaturas en centímetros de un grupo de estudiantes de séptimo.

157	157	158	159	160
160	160	161	161	161
162	162	163	163	163
164	165	168	168	168
170	171	171	160	164

Escribe una interpretación de los datos hallados.

A

Ángulos complementarios: dos ángulos para los cuales la suma de sus medidas es igual a 90° .

D

E

F



L

286 | © 2014 Pearson Education, Inc.

Máximo común divisor: el mcd de dos o más números es igual al producto de sus factores primos comunes con su menor exponente.

Media aritmética: promedio entre todos los datos de una distribución estadística. Se calcula sumando todos los datos y dividiendo este resultado entre el número total de datos.

Mediana: valor que ocupa el lugar central entre todos los valores de una tabla de frecuencias.

Medidas de tendencia central: valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Mínimo común múltiplo: el mcm de dos o más números es el producto de todos los factores primos de los números dados con su máximo exponente.

Moda: valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

Número decimal: expresión numérica formada por una parte entera y una parte decimal separadas por una coma o un punto decimal.

Pareja ordenada: dupla formada por dos elementos en la cual el orden es determinante.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se desea estudiar una o varias características.

Polígono: línea poligonal cerrada y su interior.

Polígono cóncavo: polígono que tiene un ángulo interior mayor de 180° .

Polígono convexo: polígono que tiene todos sus ángulos interiores menores que 180° .

Polígono regular: polígono en el cual la medida de todos sus lados es la misma y la abertura de sus ángulos interiores es la misma.

Polinomio aritmético: suma de números. Cada sumando se llama término del polinomio.

Números opuestos: dos números cuya suma da 0.

Números primos: aquellos que solo tienen dos divisores: 1 y el mismo número.

Porcentaje: resultado de aplicar el tanto por ciento a una cantidad dada.

Potencia: expresión usada para indicar la multiplicación de un factor por él mismo un determinado número de veces.

Primos relativos: aquellos números cuyo único divisor común es 1.

Proporción: igualdad de dos razones.

Proporcionalidad directa: se presenta cuando al aumentar un término de la proporción, el otro también se aumenta y viceversa.

Proporcionalidad inversa: se presenta cuando al aumentar un término de la proporción, el otro disminuye y viceversa.

Raíz enésima: se llama la raíz enésima de un número p al número b que al elevarlo al exponente n , es igual a p .

Segmentos adyacentes: dos segmentos son adyacentes si están en semirrectas opuestas y tienen origen común sobre la misma recta.

Tanto por ciento: una o varias partes de cada 100 partes iguales.

Tasa: razón donde aparecen dos unidades de medida diferentes, por ejemplo, km/h.

Razón: comparación de un número con otro mediante el cociente indicado de dichos números.

Subconjunto: un conjunto A es subconjunto de un conjunto B si todos los elementos de A están en B .

Trapezio: cuadrilátero que tiene solo un par de lados paralelos.

Trapezoide: cuadrilátero convexo sin lados paralelos.

Unión: la unión entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto, contados una sola vez. Se escribe $A \cup B$.

Valor absoluto: recta numérica, el valor absoluto de un número entero es la distancia de cero a ese número. Para simbolizar el valor absoluto de un número entero b se escribe $|b|$.

Variable estadística: característica que se estudia en cada elemento de la población o muestra.

BIBLIOGRAFÍA

- ⌘ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Decreto 1860 de agosto 3 de 1994*.
- ⌘ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá, 1998.
- ⌘ MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Resolución número 2343 de junio 5 de 1996*.
- ⌘ A.A.VV. *Currículo y aprendizaje*. Bogotá, Santillana, 1996.
- ⌘ A.A.VV. *Trabajemos solución de problemas con Santillana*. Bogotá, Santillana, 1997.
- ⌘ A.A.VV. *Matemáticas 1 Eso*. España, Editorial Santillana, 2007, pp. 111, 209, 229, 263.
- ⌘ A.A.VV. *Matemáticas 3 Eso*. España, Editorial Santillana, 2007, pp. 17, 113.
- ⌘ A.A.VV. *Matemáticas 4 Eso, opción A*. España, Editorial Santillana, 2007, p. 11.
- ⌘ ABDÓN MONTENEGRO, IGNACIO. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- ⌘ ALVARENGA, B. Y MAXIMO, A. *Física general con experimentos sencillos*. México, Harla, S. A., 1983.
- ⌘ BALDOR. *Geometría plana y del espacio y trigonometría*. México, Publicaciones cultural, 1998.
- ⌘ BARNETT, RICH. *Serie de compendios Schaum. Teoría y problemas de geometría plana con coordenadas*, México, McGraw Hill, 1970.
- ⌘ BOL, BRIAN. *Matemáquinas, la matemática que hay en la tecnología*, Labor.
- ⌘ BUECHE, F. *Fundamentos de física I*. Colombia, McGraw Hill latinoamericana S.A., 1988.
- ⌘ CASTRO, ENCARNACIÓN; RICO, LUIS; CASTRO, ENRIQUE. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2*. España, Editorial Síntesis, 1996.
- ⌘ CENTENO PÉREZ, JULIA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. España, Editorial Síntesis, 1997.
- ⌘ CLEMENS, S. R., ET AL. *Serie Auli. Geometría*. México, Addison Wesley. Pearson educación, 1998.
- ⌘ DEL OLMO ROMERO, MARÍA ÁNGELES; MORENO CARRETERO, MARÍA FRANCISCA; GIL CUADRA, FRANCISCO. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19*. España, Editorial Síntesis, 1993.
- ⌘ DÍAZ RODRÍGUEZ, JUAN BATANERO; BERNABEU, MARÍA DEL CARMEN; CARIZARES CASTELLANOS, MARÍA JESÚS. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27*. España, Editorial Síntesis, 1996.
- ⌘ FICL MORA, MARÍA LUISA; FORTUNA AYMEMI, JOSEPH MARÍA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20*. España, Editorial Síntesis, 1990.
- ⌘ GONZÁLEZ, JOSÉ LUIS; IRIARTE, MARÍA; JIMENO, MANUELA; ORTIZ, ALFONSO; SANZ, ESTEBAN; VARGAS MACHUCA, INMACULADA. *Matemáticas cultura y aprendizaje 6*. España, Editorial Síntesis, 1990.
- ⌘ GUILLÉN SOLER, GREGORIA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15*. España, Editorial Síntesis, 1997.
- ⌘ HEWITT, PAUL G. *Física conceptual. Tercera edición*, Pearson Educación, 1999.
- ⌘ LINDENMAYER, ASISTID. *Arreglos Geométricos de la naturaleza. Árbol pitagórico*.
- ⌘ MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. *Pensar matemáticamente*. Madrid, MEC/Labor, 1992.
- ⌘ MOISE, E. Y DOWNS, F. *Geometría Moderna*. Estados Unidos, Addison Wesley Publishing Co.
- ⌘ PAPPAS, THEONIL. *El encanto de las matemáticas. Los secretos ocultos del arte*. Zugarto ediciones, 1997.
- ⌘ PAPPAS, THEONIL. *La magia de las matemáticas. El orden oculto tras la naturaleza y el arte*. Zugarto ediciones, 1996.
- ⌘ PASTOR, GUILLERMO. *Matemáticas financieras*. Madrid, Limusa, 1998.
- ⌘ PERA, JOSÉ ANTONIO. *Álgebra en todas partes*. México, SEDICE, 1999.
- ⌘ POLEA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas, 1989.
- ⌘ SESTIER, ANDRÉS. *Historia de las matemáticas*. México, Limusa, 1983.
- ⌘ STEPHEN, F. M. *Historia de la ciencia*. Madrid, Alianza Editorial.
- ⌘ VÁSQUEZ, C. *Geometría plana y del espacio*. Madrid, Biblioteca Santillana de consulta.
- ⌘ MICROSOFT CORPORATION. Biblioteca de consulta Microsoft Encarta 2005, 1993-2004.